

I. megoldás. Legyen S_0 az $f \cap e_1, f \cap e_2, \dots, f \cap e_n$ pontok súlypontja. Ekkor S_0 nyilván rajta van az f egyenesen. Vegyünk fel egy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az origója S_0 legyen, az y tengely egyenese pedig essen egybe f -fel. Ebben a koordináta-rendszerben f egyenlete $X = 0$, az e_i egyenes egyenlete pedig minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén felírható $Y = m_i X + b_i$ alakban, mert ezen egyenesek egyike sem párhuzamos f -fel.

Ha az f -fel párhuzamos f_α egyenes egyenlete $X = \alpha$, akkor az $f_\alpha \cap e_i$ pont koordinátái $(\alpha, m_i \alpha + b_i)$. Tehát a súlypont koordinátáinak kiszámítására vonatkozó szabály alapján $\alpha = 0$ esetén kapjuk, hogy

$$S_0 = (0, 0) = \left(0, \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}\right),$$

azaz $\sum_{i=1}^n b_i = 0$, általában pedig

$$S_\alpha = \left(\frac{n\alpha}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \alpha + b_i)}{n}\right) = \left(\alpha, \frac{\sum_{i=1}^n m_i \alpha}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}\right) = \left(\alpha, \frac{\sum_{i=1}^n m_i \alpha}{n}\right).$$

Az S_0 és S_α ($\alpha \neq 0$) pontok összekötő egyenesének egyenletét az ismert képlet szerint felírva, majd azt rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\alpha - 0)(Y - 0) &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \alpha}{n} - 0\right)(X - 0), \\ \alpha Y &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \alpha}{n} X, \\ Y &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n} X. \end{aligned} \quad (1)$$

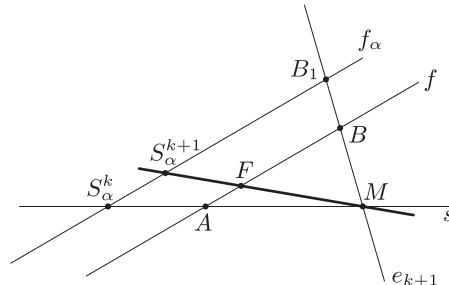
Ebben az egyenletben nem szerepel α , vagyis az S_α pont az α értékétől függetlenül rajta van az (1) egyenletű egyenesen, tehát az S_α pontok kollineárisak.

II. megoldás. A feladat állítását az egyenesek száma szerinti teljes indukcióval látjuk be. Ha $n = 1$, akkor S_α megegyezik f_α és e_1 metszéspontjával, azaz valamennyi súlypont az e_1 egyenesen van.

Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz az állítás. Legyen $n = k + 1$. Jelölje S_α^k az $f_\alpha \cap e_1, f_\alpha \cap e_2, \dots, f_\alpha \cap e_k$ pontok súlypontját. Az indukciós feltevés szerint az S_α^k pontok egy egyenesre esnek. Jelölje ezt az egyenest s . Egy adott f_α esetén S_α^k éppen $f_\alpha \cap s$, mert a súlypont nyilván illeszkedik f_α -ra is. (Az nem lehet, hogy s és f_α egybeessenek, mert akkor más, f_α -val párhuzamos egyenesnek nem lenne közös pontja s -sel.)

Tekintsük most az $f_\alpha \cap e_1, f_\alpha \cap e_2, \dots, f_\alpha \cap e_{k+1}$ pontok S_α^{k+1} súlypontját. Ez a súlypontoszerkesztési tétel (ezt részletesebben lásd a megoldás utáni megjegyzésben) szerint megegyezik az S_α^k és $f \cap e_{k+1}$ pontok által meghatározott szakaszt $1 : k$ arányban osztó ponttal (a szakasz esetleg elfajulhat egyetlen ponttá). Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ezek az osztópontok egy egyenesre esnek. Két esetet különböztetünk meg.

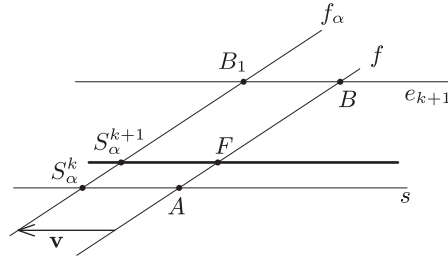
Ha s nem párhuzamos e_{k+1} -gyel, akkor a metszéspontjukat jelölje M . Egy tetszőleges, f -vel párhuzamos, M -en át nem menő egyenes messe s -et A -ban, e_{k+1} -et pedig B -ben. Az AB szakasz $1 : k$ arányú osztópontját jelölje F (1. ábra). Megmutatjuk, hogy minden S_α^{k+1} pont illeszkedik az MF egyenesre. Ha f_α átmegy M -en, akkor s -et és e_{k+1} -et is M -ben metszi, így a metszéspontok „osztópontja” is M lesz. Ha f_α nem megy át M -en, akkor az s -sel való metszéspontja S_α^k . Ha $f_\alpha \cap e_{k+1} = B_1$, akkor az $S_\alpha^k B_1$ szakasz $1 : k$ arányú osztópontja S_α^{k+1} . Tekintsük azt az M középpontú ϕ hasonlóságot, ami A -t S_α^k -ba viszi. Ekkor ϕ a B pontot B_1 -be viszi, mert B képe illeszkedik az e_{k+1} egyenesre és a B képét S_α^k -val összekötő szakasz párhuzamos AB -vel, F képe pedig S_α^{k+1} , mert a hasonlóság aránytartó. Tehát ebben az esetben az S_α^{k+1} pontok illeszkednek az MF egyenesre.



1. ábra

Ha s párhuzamos e_{k+1} -gyel, akkor a feltételekből következik, hogy f nem párhuzamos velük. Legyen f -nek s -sel, illetve e_{k+1} -gyel való metszéspontja A , illetve B , az AB szakasz $1 : k$ arányú osztópontja pedig F (2. ábra). Megmutatjuk, hogy ekkor minden S_α^{k+1} pont illeszkedik az F -en átmenő, s -sel párhuzamos t egyenesre. Tekintsük

most azt az eltolást, ami az f egyenest f_α -ba viszi és $\mathbf{v}$ meghatározó vektora párhuzamos az s egyenessel. Ennél az eltolásnál az A képe $f_\alpha \cap s = S_\alpha^k$, a B képe $f_\alpha \cap e_{k+1}$, és ezért F képe az AB szakasz $1 : k$ arányú osztópontja, azaz S_α^{k+1} . Vagyis az $\overrightarrow{FS_\alpha^{k+1}}$ vektor párhuzamos s -sel, tehát ebben az esetben az S_α^{k+1} pontok illeszkednek a t egyenesre.



2. ábra

Ezzel beláttuk, hogy az állítás $n = k + 1$ -re is igaz, s így minden n pozitív egész számra teljesül.

Megjegyzés. A súlypontoszerkesztési tételnek több változata van. Feladatunk megoldása során mi a következő, egyszerű formáját használtuk:

Ha a térben egy n pontból álló $\mathcal{P}$ halmazt tetszőleges módon felosztunk egy $1 \leq k \leq n - 1$ pontból álló $\mathcal{P}_1$ és egy $n - k$ pontból álló $\mathcal{P}_2$ halmazra, akkor $\mathcal{P}$ súlypontja megegyezik a $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ súlypontjait összekötő szakaszt $(n - k) : k$ arányban osztó ponttal.

Bizonyítás. Jelöljük egy tetszőleges kezdőpontból a $\mathcal{P}$ pontjaiba mutató vektorokat $\mathbf{p}_i$ -vel, a súlypontokba mutató vektorok pedig legyenek rendre $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$. Ekkor a súlypont helyvektorára vonatkozó képlet szerint

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n}{n}, \quad \mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{p}_{i_1} + \mathbf{p}_{i_2} + \cdots + \mathbf{p}_{i_k}}{k}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{p}_{i_{k+1}} + \mathbf{p}_{i_{k+2}} + \cdots + \mathbf{p}_{i_n}}{n - k}.$$

Ezért

$$\mathbf{s} = \frac{k\mathbf{s}_1 + (n - k)\mathbf{s}_2}{k + (n - k)},$$

ami a szakaszt adott arányban osztó pont helyvektorára vonatkozó ismert képlet alapján bizonyítja tételünket.