

I. megoldás.¹ A négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll: $x \geq 1$. Mivel a jobb oldal ekkor pozitív, a bal oldal is az: $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) > 0$. Mivel $x < 1$ nem teljesülhet, azt kapjuk, hogy $x > 3$. Az egyenletet átrendezve:

$$(1) \quad (x-2)^2 + 1 = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}} + 2.$$

Az $f: (3; +\infty) \rightarrow (2; +\infty)$, $f(x) = (x-2)^2 + 1$ függvény szigorúan monoton növekvő, bijektív az értelmezési tartományán, ezért invertálható. Inverz függvénye az $f^{-1}: (2; +\infty) \rightarrow (3; +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$. Vegyük itt mindkét oldal értékét $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$ -nél:

$$f^{-1}(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}} + 2.$$

A jobb oldal épp (1) jobb oldala. Ezek alapján az egyenlet:

$$f^{-1}(f^{-1}(x)) = f(x),$$

ami pontosan akkor igaz, ha $f^{-1}(x) = f(f(x))$, vagyis ha $x = f(f(f(x)))$.

Mivel az f függvény szigorúan monoton növekvő, ezért $f(x) > x$ esetén $f(f(x)) > f(x) > x$, amiből $f(f(f(x))) > f(f(x)) > f(x) > x$ következik. Hasonlóan, ha $f(x) < x$, akkor $f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x$.

Tehát $x = f(f(f(x)))$ csak akkor teljesülhet, ha $x = f(x)$, és ekkor valóban igaz is.

Így

$$(x-2)^2 + 1 = x, \quad \text{amiből} \quad x^2 - 5x + 5 = 0.$$

A megoldóképlet alapján $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Csak a nagyobb gyök teljesíti az $x > 3$ kikötést, vagyis $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe, mindkét oldalon $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ adódik, tehát a megoldás jó.

II. megoldás. Mivel $x = 1$ nem megoldás, ezért legyen $a = \sqrt{x-1} > 0$. Ekkor $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = a^2(a^2 - 2)$ és $\sqrt{1 + \sqrt{x-1}} = \sqrt{1 + a}$. Ebből $a^2(a^2 - 2) = \sqrt{1 + a}$, amit négyzetre emelve $a^4(a^4 - 4a^2 + 4) = 1 + a$. Ezt rendezve $a^8 - 4a^6 + 4a^4 - a - 1 = 0$.

Próbáljuk meg a bal oldalt szorzattá alakítani:

$$\begin{aligned} a^8 - 4a^6 + 4a^4 - a - 1 &= a^8 - a^7 - a^6 + a^7 - a^6 - a^5 - 2a^6 + 2a^5 + 2a^4 - \\ &\quad - a^5 + a^4 + a^3 + a^4 - a^3 - a^2 + a^2 - a - 1 = \\ &= (a^2 - a - 1)(a^6 + a^5 - 2a^4 - a^3 + a^2 + 1). \end{aligned}$$

Ez pontosan akkor 0, ha az egyik tényezője az.

A második tényezőt vizsgálva:

$$\begin{aligned} a^6 + a^5 - 2a^4 - a^3 + a^2 + 1 &= a^6 - 2a^3 + 1 + a^5 - 2a^4 + a^3 + a^2 = \\ &= (a^3 - 1)^2 + a^3(a-1)^2 + a^2 > 0, \end{aligned}$$

miel az első két tag nemnegatív, a harmadik pedig pozitív.

Ha az első tényező 0: $a^2 - a - 1 = 0$, amiből $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mivel $a > 0$, csak a pozitív megoldás jön szóba: $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Mivel $x = a^2 + 1$, így ebből

$$x = 1 + \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ami behelyettesítve valóban jó megoldást ad.

Megjegyzés. Aki egy 8-ad-fokú polinomot indoklás nélkül szorzattá alakított, legfeljebb 3 pontot kaphatott.

III. megoldás. Az előző megoldásokból $x \geq 3$ és az egyenlet $(x-1)(x-3) = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}}$.

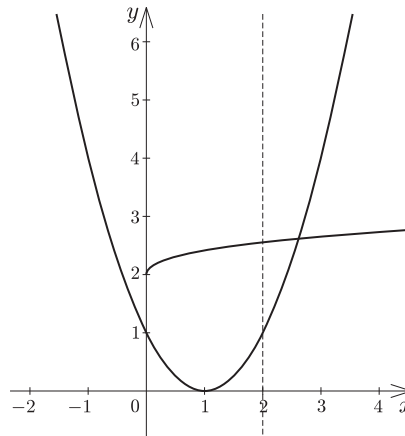
Legyen $a = x - 1 \geq 2$, ekkor

$$(a-1)^2 - 1 = \sqrt{1 + \sqrt{a}},$$

vagyis $(a-1)^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}$.

¹Érdemes tanulmányozni Ábrahám Gábor: Az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelősége és egyéb érdekességek c. cikkét (KöMaL, 2010. december, és www.komal.hu/cikkek/abraham/abraham.h.shtml).

Az $y = (x - 1)^2$ függvény grafikonja $x \geq 2$ esetén a megfelelő parabolának egy szigorúan monoton növekedő része, amely végig konvex. Az $y = 1 + \sqrt{x}$ függvény gyökfüggvény, aminek menete még egy gyökvonással lényegében nem változik (nem keletkezik benne inflexiós pont, végig konkáv). Így a két grafikon egy pontban metszi egymást.



Mivel $a > 0$, gyököt vonhatunk mindkét oldalból: $a - 1 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}}$, amiből

$$(2) \quad a = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}}.$$

Ha a helyére a jobb oldalon behelyettesítenénk a értékét, vagyis a jobb oldalt, majd ezt az eljárást végtelen sokszor megismételnénk, úgy egy végtelen sorozatot kapnánk: $1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}$. Azt sejtjük, hogy az egyenletben szereplő a értéke ez a sorozat, vagyis a bárhova behelyettesíthető a sorozaton belül, tehát:

$$a = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}} = 1 + \sqrt{a}, \quad \text{ebből} \quad a - 1 = \sqrt{a}.$$

Innen $x - 2 = \sqrt{x - 1}$, négyzetre emelve $x^2 - 4x + 4 = x - 1$, rendezve

$$x^2 - 5x + 5 = 0.$$

Ennek az egyetlen, a kikötésnek megfelelő gyöke $x = 2,5 + \sqrt{1,25}$. Mivel több gyök nincs, ez az egyetlen megoldás.

Megjegyzés. Mivel $a > 0$, a (2) egyenlet mindkét oldalából gyököt vonva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{a} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}}},$$

amiből $f(y) = \sqrt{1 + y}$ jelöléssel az I. megoldásbeli $y = f(f(f(y)))$ alakot kapjuk.