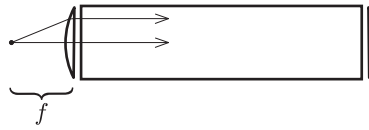


Megoldás. a) Ha azt szeretnénk, hogy a rúd másik végétől ugyanakkora távolságra találkozzanak az onnan kilépő fénysugarak, akkor egy nyilvánvaló megoldás erre az, hogy a rúd egyik külső fókuszába helyezzük el a pontszerű fényforrást. Az ebből kiinduló fénysugarak a rúd belsejében párhuzamosan haladnak, majd a másik végénél kilépve újra fókusz távolságnyra egyesülnek.

Tovább egyszerűsíti a megoldást, ha gondolatban levágjuk a rúd végeit. Ezáltal két vékony lencsét és közöttük egy „plánparalel” réteget kapunk (3. ábra).



3. ábra

A vékony, síkdomború lencse fókusz távolságára

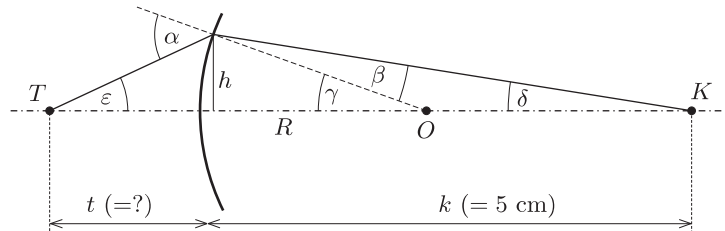
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \text{most } R_2 \rightarrow \infty.$$

Így

$$f = \frac{R}{n - 1} = \frac{1 \text{ cm}}{1,5 - 1} = 2 \text{ cm}.$$

Van azonban egy másik lehetséges megoldás is! Ekkor a fénysugarak nem párhuzamosan haladnak a rúd belsejében, hanem a rúd közepén találkoznak, majd ebből a pontból kiindulva érik el a rúd másik végét. Ott kilépve éppen olyan messze találkoznak, mint amilyen távolságra voltak a rúd első végétől, amikor elindultak. Ez is egy szimmetrikus sugármenet, de most már nem segít a megoldásban az előbbi „felszeletelés”.

Vizsgáljuk meg általánosan az első felület adta leképezést! Legyen a kiindulási T tárgy pont a rúdvégtől t távolságra, keletkezzék ennek K képe a rúd belsejében k távolságra a leképező rúdvégtől. További jelölések a 4. ábrán láthatók.



4. ábra

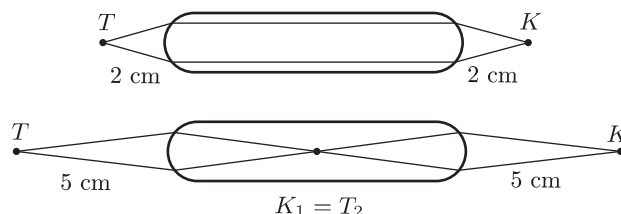
Az ábráról leolvasható, hogy $\alpha = \varepsilon + \gamma$, valamint $\gamma = \beta + \delta$. Mindegyik szög külön-külön is kicsi, ezért a Snellius–Descartes-törvény felhasználásával

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon + \gamma}{\gamma - \delta}.$$

Ebből

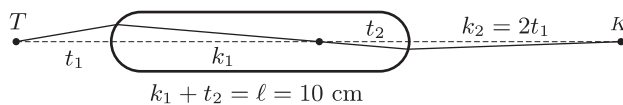
$$\begin{aligned} n(\gamma - \delta) &= \varepsilon + \gamma, \\ n\gamma - \gamma &= \varepsilon + n\delta, \\ (n - 1) \frac{h}{R} &= \frac{h}{t} + n \frac{h}{k}, \\ \frac{1}{t} + \frac{n}{k} &= (n - 1) \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1,5}{5 \text{ cm}} = \frac{0,5}{1 \text{ cm}} \Rightarrow t = 5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

A kétféle sugármenet tehát a következő:



5. ábra

b) Tekintsük a 6. ábrát!



6. ábra

Az előző gondolatmenethez hasonlóan most is meghatározhatnánk a kis szöget bezáró fénysugarakra érvényes leképezési törvényeket. Helykímélés céljából ezt itt nem tesszük meg, de bárki ellenőrizheti, hogy a két végnél a következőket kapjuk:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{n}{k_1} = \frac{n-1}{R}, \quad \text{illetve} \quad \frac{n}{t_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{n-1}{R}.$$

(Megjegyezni úgy lehet, hogy mindig azt a kép-, illetve tárgytávolságot kell osztani n -nel, amelyik az üvegben van.)

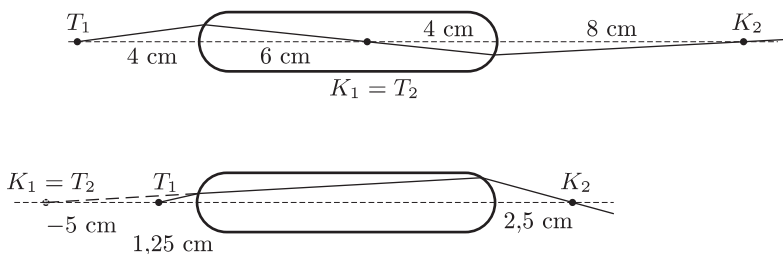
A keresett t_1 távolságot x -szel jelölve:

$$\frac{1}{x} + \frac{1,5}{k_1} = \frac{0,5}{1 \text{ cm}}, \quad \text{illetve} \quad \frac{1,5}{10 \text{ cm} - k_1} + \frac{1}{2x} = \frac{0,5}{1 \text{ cm}}.$$

Ebből x -re másodfokú egyenlet adódik, megoldása:

$$x_1 = 4 \text{ cm}; \quad x_2 = 1,25 \text{ cm}.$$

Ellenőrzésképpen kiszámíthatjuk az új képpontok helyzetét. Eredményünket a 7. ábra mutatja.



7. ábra. $x = 4 \text{ cm}$ esetén $k_1 = 6 \text{ cm}$, $t_2 = 4 \text{ cm}$, $k_2 = 8 \text{ cm}$. $x = 1,25 \text{ cm}$ esetén $k_1 = -5 \text{ cm}$, $t_2 = 15 \text{ cm}$, $k_2 = 2,5 \text{ cm}$

Megjegyzések. 1. További megoldásokat is kaphatnánk, ha nemcsak a második rúdvégén átmenő, hanem az innen visszaverődő fénysugarakat is vizsgálánk. Ezek egy része az első felületről is visszaverődik, és újra a második felület felé halad. Itt egy részük kilép, másik részük visszaverődik. Vagyis páros számú visszaverődés után újabb és újabb, egyre halványabb képpontok keletkeznek a rúd másik végéről történő kilépés után a levegőben. Ennek vizsgálatát természetesen nem várta el a versenybizottság.

2. Több versenyző próbálkozott olyan megoldással, amikor az üveghenger oldala is részt vesz a leképezésben. Ez hibás gondolat, mivel a rúd tengelyén lévő pontból kiinduló és a tengellyel kis szöget bezáró fénysugarak az üvegben is a tengely közelében haladnak, nem érhetik el a henger oldalát.