

Megoldás. a) A guriga tömegközéppontja nem esik az alátámasztási pont fölé, az így fellépő forgatónyomaték görgeti ki a szőnyeget.

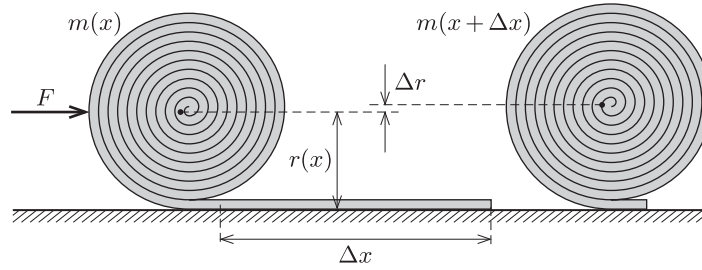
b) A guriga egyensúlyát biztosító vízszintes F erőt a virtuális munka elvéből határozhatjuk meg. Ha a nem teljesen felgöngyölt gurigát kicsiny Δx távolsággal feljebb görgetjük, az $F(x)$ erő által végzett munka a szőnyeg helyzeti energiájának (kicsiny) megváltozását biztosítja:

$$F(x)\Delta x = \Delta E_h.$$

A szőnyeg helyzeti energiája

$$E_h(x) = m(x)gr(x),$$

amely a feltekeredés közben két okból is növekszik: egyrészt magasabbra kerül a tömegközéppontja, másrészt feltekerés közben a szőnyeg „hízik” is. (A földön fekvő rész helyzeti energiája 0, azzal nem kell számolnunk.)



2. ábra

A helyzeti energia kicsiny megváltozása eszerint

$$\Delta E_h = mg \cdot \Delta r + \Delta m \cdot gr.$$

A szőnyeg x hosszúságú darabjának feltekerésekor kialakuló szőnyegguriga m tömege egyenesen arányos a felgöngyölt rész hosszával, így

$$\Delta m = \frac{m}{x} \Delta x \quad \text{és} \quad m = \frac{M}{L} x,$$

hiszen $x = L$ esetén a tömeg éppen M . A guriga keresztmetszetének területe is arányos x -szel, vagyis a guriga sugarára fennáll:

$$r^2 = \frac{R^2}{L} x.$$

Ebből kifejezhetjük Δr -t is Δx segítségével (felhasználva, hogy Δr kicsi):

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{L} \Delta x &= (r + \Delta r)^2 - r^2 \approx 2r\Delta r, \\ \Delta r &= \frac{1}{2} \frac{r}{x} \Delta x. \end{aligned}$$

Mindezt behelyettesítve ΔE_h kifejezésébe:

$$\Delta E_h = \frac{3}{2} \frac{mgr}{x} \Delta x.$$

Ebből pedig az x darabon feltekert guriga megtartásához szükséges erő:

$$F(x) = \frac{3}{2} \frac{mgr}{x} = \frac{3}{2} \frac{MgR}{L} \sqrt{\frac{x}{L}},$$

amelyből a keresett F erő $x = L$ helyettesítéssel

$$F = \frac{3}{2} \frac{R}{L} Mg.$$

Megjegyzések. 1. Néhány versenyző próbálkozott a virtuális munka elvével, de a helyzeti energia megváltozásában elfelejtettek az egyik tagról. A fenti megoldásban az erőt a feladat kérdésénél kicsit általánosabban, x függvényében egy tetszőleges helyzetben is megadtuk, ez lehetőséget ad a megoldás ellenőrzésére. Az erő elmozdulás szerinti integrálásával meghatározzuk a feltekeréshez szükséges teljes munkát:

$$\int_0^L F(x) dx = \int_0^L \frac{3}{2} \frac{MgR}{L} \sqrt{\frac{x}{L}} dx = MgR,$$

ez valóban megegyezik a teljesen feltekert szőnyeg helyzeti energiájával.

2. A versenyzők többsége statikai megoldással próbálkozott. A feladat így is megoldható, azonban még könnyebb tévedni. A statikai megoldásban a forgatónyomatékok egyensúlyát írjuk fel a szőnyeg alátámasztási pontjára:

$$FR = Mgx_{\text{tkp}},$$

ahol x_{tkp} a guriga tömegközéppontjának távolsága az alátámasztáson át húzott függőleges egyenestől. A feladat ennek meghatározása.

A tömegközéppont *két* okból sem esik az alátámasztási pont fölé: egyrészt a guriga spirális alakja miatt a guriga érintője nem merőleges a spirál középpontjából az érintési ponthoz húzott sugárra, másrészt a guriga tömegközéppontja nem a spirál középpontjába esik. (Mindkét okra rájöttek versenyzők, de senki se gondolt mindkettőre, így helyes megoldás nem született.)

A guriga „ferdesége”, és így a spirál középpontjának helye könnyen meghatározható a menetemelkedésből. A tömegközéppont ebből származó elmozdulása

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{R^2}{L}.$$

A guriga tömegközéppontjának a spirál középpontjához viszonyított helyét sokféleképp meg lehet határozni, erre sok helyes megoldás érkezett az integrálástól az ügyes trükkökig. Egy lehetőség például az, hogy a gurigát gondolatban kiegészítjük egy további fél menettel, melynek tömegét és tömegközéppontjának helyét is ismerjük: ekkor a szimmetria (és a szőnyeg kis vastagsága) miatt a tömegközéppont ugyanolyan távolra kerül a spirál középpontjától, csak éppen a másik irányba – és ebből a keresett távolság már könnyen kiszámolható:

$$x_2 = \frac{R^2}{L}.$$

A két részeredményt összeadva

$$x_{\text{tkp}} = x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \frac{R^2}{L},$$

amiből a keresett erőre valóban helyes eredményt kapunk.

3. Néhány versenyző a szőnyeg rugalmas tulajdonságaival próbálta magyarázni a jelenséget. A feladat szövegében viszont az áll, hogy a szőnyeg *hajlékony*, ami arra utal, hogy ezt a hatást nem kell figyelembe venni. (Nem is voltak megadva olyan adatok, amikre ez esetben szükség lenne.)