

3. feladat. A grönlandi jégsapka

3.1. A jégtakaró belsejében a hidrosztatikai nyomás, mint a jégválasztó vonaltól mért x távolság és a földfelszíntől (tengerszinttől) mért z magasság függvénye: $p(x, z) = \varrho_{\text{jég}} g (H(x) - z)$.

3.2a. Az y - z síktól („jégválasztótól”) x távolságra lévő függőleges oldalfalra ható erő kifejezhető:

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \varrho_{\text{jég}} g (H(x) - z) dz = \frac{1}{2} \Delta y \varrho_{\text{jég}} g H(x)^2.$$

A függőleges oldalfalú jégrétegre ható két vízszintes erő különbsége:

$$\Delta F = F(x) - F(x + \Delta x) = -\frac{dF}{dx} \Delta x = -\Delta y \varrho_{\text{jég}} g H(x) \frac{dH}{dx} \Delta x.$$

Használjuk fel, hogy $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$. Így adódik S_b értékére:

$$S_b = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y} = -\varrho_{\text{jég}} g H(x) \frac{dH}{dx}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $S_b = k H(x) dH/dx$, ahol az arányossági tényező $k = -\varrho_{\text{jég}} g$.

3.2b. Megkapjuk a jégsapka $H(x)$ magasságprofilját, ha megoldjuk a következő differenciálegyenletet:

$$S_b = -\varrho_{\text{jég}} g H(x) \frac{dH}{dx}, \quad \text{ebből} \quad H dH = -\frac{S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} dx.$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$H(x)^2 = -\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} x + C.$$

Használjuk fel, hogy H értéke az $x = L$ helyen 0. Így az integrációs állandóra adódik:

$$C = \frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} L.$$

Most már a $H(x)$ magasságprofil megadható:

$$H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} (L - x)}.$$

Megadhatjuk H legnagyobb értékét, melyet az $x = 0$ helyen vesz fel a függvény:

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} L}.$$

3.2c. Grönland modelljében a jégsapka alapja egy téglalap, amelynek területe $A = 10L^2$. A jégsapka térfogatát úgy fogjuk megkapni, ha a **3.2b.** feladatrészen megismert magasságprofilt erre a területre integráljuk.

$$\begin{aligned} V_{\text{jég}} &= (5L)2 \int_0^L H(x) dx = 10L \int_0^L \left(\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{L - x} dx = \\ &= 10L H_m \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx. \end{aligned}$$

Áttérve az $u = 1 - x/L$ integrálási változóra:

$$V_{\text{jég}} = 10L^2 H_m \int_0^1 \sqrt{u} du = 10L^2 H_m \cdot \frac{2}{3}.$$

Felhasználva, hogy $H_m \propto L^{1/2}$, illetve az $L \propto A^{1/2}$ arányosságot azt kapjuk, hogy $V_{\text{jég}} \propto A^{5/4}$. Tehát a keresett kitevő $\gamma = 5/4$.

3.3. A szimmetria miatt a jégválasztónál a jég x -irányú sebessége 0, tehát $v_x(x=0) = 0$. Tekintsük a jégsapka $x = 0$ és $x > 0$ között elhelyezkedő, Δy szélességű darabját! Erre a darabra a hőesések miatt egységnyi idő alatt $V_{\text{be}} = cx\Delta y$ térfogatú jég rakódik. Eközben a kiszemelt jégdarab $x > 0$ -nál elhelyezkedő, $H_m\Delta y$ területű, függőleges keresztmetszetén egységnyi idő alatt $V_{\text{ki}} = v_x(x)H_m\Delta y$ térfogatú jég áramlik ki. Mivel a jégsapka alakja időben állandósult állapotban található, $V_{\text{be}} = V_{\text{ki}}$, ahonnan a

$$v_x(x) = \frac{cx}{H_m}$$

eredményt kapjuk.

3.4. A jég áramlási sebességének komponenseire vonatkozó $dv_x/dx + dv_z/dz = 0$ egyenletből, valamint a **3.3.** feladatrész eredményét használva:

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{c}{H_m}.$$

Integrálás után:

$$v_z(z) = -\frac{cz}{H_m} + C,$$

ahol a C integrálási változó a $v_z(z=0) = 0$ feltétel miatt zérus. A jégdarabkák függőleges sebességkomponense tehát:

$$v_z(z) = -\frac{cz}{H_m}.$$

3.5. A jégdarabka sebességének x - és z -irányú komponensére kapott kifejezések differenciálegyenleteket szolgáltatnak az $x(t)$, $z(t)$ koordinátákra:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{H_m}x, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{c}{H_m}z.$$

A kezdeti feltételeket ($z(0) = H_m$, $x(0) = x_i$) figyelembe véve a következő két függvény adódik eredményül:

$$x(t) = x_i e^{\frac{c}{H_m}t}, \quad z(t) = H_m e^{-\frac{c}{H_m}t}.$$

A két függvényt összeszorozva az idő kiküszöbölhető: $x \cdot z = x_i H_m$, amiből látható, hogy a jégdarabka pályája egy

$$x = \frac{x_i H_m}{z}$$

egyenletű hiperbola.

3.6. A jégválasztónál ($x = 0$) az áramlás csak függőleges irányú, és a $z(t)$ függvényt a **3.5.** feladatrészben már felírtuk. Képezzük ennek inverzét:

$$\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln \left(\frac{H_m}{z} \right).$$

3.7a. A c_{ig} jégképződési sebesség meghatározásához szükségünk van a következő adatokra: $T_1 = 11700$ év; $z_1 = 3060 \text{ m} - 1492 \text{ m} = 1568 \text{ m}$; $H_m = 3060 \text{ m}$. A **3.6.** feladatrészben levezetett függvényt használva:

$$c_{ig} = \frac{H_m}{T_1} \ln \left(\frac{H_m}{z_1} \right) = 0,175 \text{ m/év}.$$

A jégkorszak 120 ezer évvel ezelőtti kezdete a feladat szövege szerint 3040 m mélységnek feleltethető meg. Használjuk a jégfolyam áramlási sebességének függőleges komponensére a **3.4.** feladatrészben kapott összefüggést:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{c}{H_m}z.$$

Átrendezve, majd mindkét oldalt integrálva 3040 m mélységtől a felszínig:

$$\begin{aligned} H_m \left(-\frac{1}{z} \right) dz &= c dt, \\ H_m \ln \left(\frac{H_m}{H_m - 3040} \right) &= \int_{11\,700 \text{ év}}^{120\,000 \text{ év}} c_{jk} dt + \int_0^{11\,700 \text{ év}} c_{ig} dt, \\ H_m \ln \left(\frac{H_m}{H_m - 3040} \right) &= c_{jk} \cdot (108\,300 \text{ év}) + c_{ig} \cdot (11\,700 \text{ év}). \end{aligned}$$

Az egyenlet rendezése és behelyettesítés után a $c_{jk} = 0,123 \text{ m/év}$ eredményt kapjuk, ami sokkal kevesebb csapadékot jelent, mint napjainkban.

3.7b. A feladat szövegében (lásd a KöMaL múlt havi számát) az *5. ábra (b)* grafikonjáról leolvasható, hogy a jégkorszakból a jégkorszak utáni időszakba történő átmenetkor a $\delta^{18}\text{O}$ értéke kb. -43 ezrelékről -34 ezrelékre változott. Az *5. ábra (a)* grafikonja szerint $\delta^{18}\text{O}$ értékének ilyen változása kb. -40°C és -30°C hőmérsékletek között következik be, ez 10°C hőmérsékletemelkedést jelent.

3.8. A jégapka alapját modellező téglalap területét ismerve kiszámolható a téglalap L hosszúságparamétere:

$$L = \sqrt{A_G/10} = 4,14 \cdot 10^5 \text{ m}.$$

A jégsapka térfogatának kiszámításához használjuk a **3.2b.** és **3.2c.** részben kapott eredményeket!

$$V_{\text{jég}} = \frac{20}{3} L^2 H_m = \frac{20}{3} L^{5/2} \sqrt{\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g}} = 3,46 \cdot 10^{15} \text{ m}^3.$$

Ennek a jégnek a megolvadása során keletkező víz térfogata:

$$V_{\text{víz}} = \frac{\varrho_{\text{jég}}}{\varrho_{\text{víz}}} V_{\text{jég}} = 3,18 \cdot 10^{15} \text{ m}^3,$$

ezt az eredményt elosztva a Föld óceánjainak teljes területével megkapjuk az olvadás okozta átlagos vízszintemelkedést:

$$h = \frac{V_{\text{víz}}}{A_{\text{óceán}}} = 8,82 \text{ m}.$$

3.9. Az óceán felszíne ekvipotenciális. A vízfelszín h magasságban lévő, Grönlandtól r távolságra elhelyezkedő, m tömegű darabkájának potenciális energiája egyrészt a Föld gravitációs terétől (mgh), másrészt Grönland gravitációs vonzásából ($-G \frac{m_{\text{jég}} m}{r}$) származik:

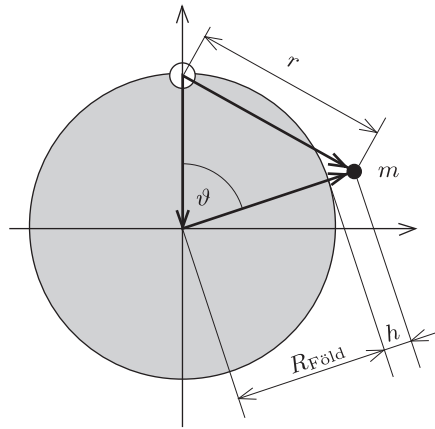
$$U = mgh - G \frac{m_{\text{jég}} m}{r},$$

ebből kifejezve a vízszint h magasságát:

$$h = h_0 + \frac{G m_{\text{jég}}}{gr},$$

ahol bevezettük a $h_0 = U/mg$ jelölést. A 2. ábrán látható ϑ középponti szöggel az r távolság kifejezhető, ennek segítségével megkapható a vízmagasság θ -függése:

$$h(\vartheta) = h_0 + \frac{G m_{\text{jég}}}{2g R_F |\sin(\vartheta/2)|}.$$



2. ábra.

Az ismert adatokat és a Grönlandon található jég tömegét ($m_{\text{jég}} = \varrho_{\text{jég}} V_{\text{jég}} = 3,18 \cdot 10^{18} \text{ kg}$) behelyettesítve:

$$h(\vartheta) = h_0 + \frac{1,69 \text{ m}}{|\sin(\vartheta/2)|}.$$

A Grönland és Koppenhága között lévő körívhez tartozó ϑ középponti szög:

$$\vartheta = \frac{3500 \text{ km}}{R_F} = 31,4^\circ,$$

Grönland és a tőle legtávolabbi földrajzi pont közötti középponti szög pedig 180° , ezzel a keresett vízszintkülönbség:

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = h_0 + \frac{1,69 \text{ m}}{|\sin(31,4^\circ/2)|} - \left(h_0 + \frac{1,69 \text{ m}}{|\sin(180^\circ/2)|} \right) = 4,56 \text{ m}.$$