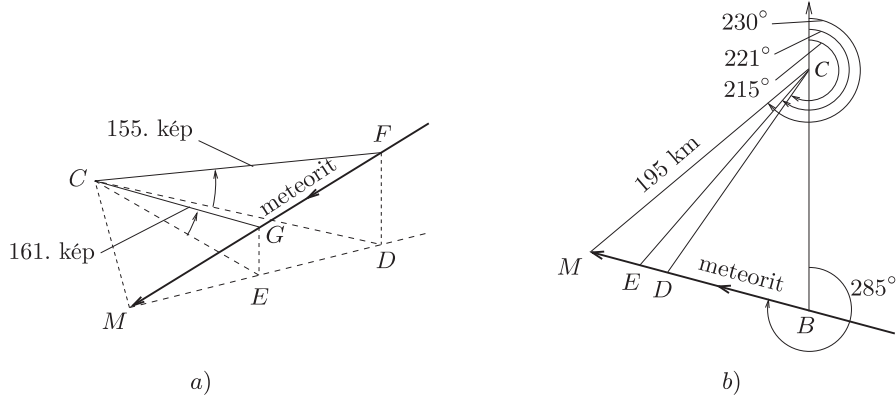


1. feladat. A Maribo-meteorit

A Maribo sebessége

1.1. A meteorit útját az 1. ábra mutatja. A C pont az észlelő biztonsági kamera helye, M a becsapódási pont, F a 155. képkockán, G pedig a 161. képkockán észlelt pozíció, D és E ezeknek a pontoknak a Föld felszínére vett vetülete. A CB egyenes észak–déli irányban áll, az északi irányt a nyíl jelzi.



1. ábra. A meteorit pályája a légkörben. a) Elforgatott, távlati nézet (nem méretarányos). b) Vízszintes síkra vett vetület

A megadott szögeket az 1.b) vetületi rajzon ívek jelölik. Ezekből megkapható az ábrán az összes többi szög is, és az $|MC| = 195$ km oldal ismeretében, elemi geometriai úton (a szinusz-tétel alkalmazásával) megkaphatóak a következő oldalak:

$$|CD| = 170,0 \text{ km}, \quad |CE| = 177,7 \text{ km}, \quad |DE| = 19,77 \text{ km}.$$

Az 1.a) távlati rajzon az ívvel jelölt, ismert magassági szögek segítségével az F és G pont magassága megkapható:

$$|DF| = |CD| \cdot \tan(19,2^\circ) = 59,20 \text{ km}, \quad |EG| = |CE| \cdot \tan(14,7^\circ) = 46,62 \text{ km}.$$

Ezután a 155. és a 161. képkocka között megtett $|FG|$ út Pitagorasz tételéből adódik:

$$|FG| = \sqrt{|DE|^2 + (|DF| - |EG|)^2} = 23,43 \text{ km},$$

így a képkockák idejének ismeretében a keresett sebesség:

$$v = \frac{|FG|}{2,28 \text{ s} - 1,46 \text{ s}} = 28,6 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Megolvad-e a meteorit az atmoszférában?

1.2a. A légkörben lassuló meteoroidra sebességtől függő, változó erő hat, így mozgását az

$$m_M \frac{dv}{dt} = -\lambda v^2, \quad \lambda = k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2$$

differenciálegyenlet írja le, mely a változók szétválasztásának módszerével egzaktul megoldható:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\lambda}{m_M} dt, \quad \int_{v_M}^{0,9v_M} \frac{dv}{v^2} = -\int_0^{t_1} \frac{\lambda}{m_M} dt, \quad -\left(\frac{1}{0,9} - 1\right) \frac{1}{v_M} = -\frac{\lambda}{m_M} t_1.$$

Így a keresett idő:

$$t_1 = \frac{m_M}{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2} \left(\frac{1}{0,9} - 1\right) \frac{1}{v_M} = 0,88 \text{ s}.$$

Differenciálegyenlet nélkül is adható egy igen jó közelítő megoldás. Miközben a sebesség v_M -ről $0,9 v_M$ -re csökken, a közegellenállási erő nem nagyon változik, átlagos értékét vehetjük $F_{\text{át1}} = -\lambda(0,95 v_M)^2$ -nek. Ebből a mozgás átlagos lassulása $a_{\text{át1}} = \frac{F_{\text{át1}}}{m_M}$, ahonnan a keresett idő:

$$t_1 = \frac{-0,1 v_M}{a_{\text{át1}}} = \frac{m_M}{k \rho_{\text{atm}} \pi R_M^2} \frac{0,1}{(0,95)^2} \frac{1}{v_M} = 0,87 \text{ s}.$$

1.2b. A meteoroid kinetikus energiájának és a teljes megolvasztáshoz szükséges energiának a hányadosa ismert összefüggések alapján:

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{olv}}} = \frac{\frac{1}{2} m_M v_M^2}{c_{k\delta} m_{k\delta} (T_{k\delta} - T_0) + m_{k\delta} L_{k\delta}} = 2,1 \cdot 10^2 \gg 1.$$

A Maribo melegedése a légkörön való áthatolás alatt

1.3a. Az $x \approx t^\alpha \varrho_{k\delta}^\beta c_{k\delta}^\gamma k_{k\delta}^\delta$ összefüggésben csak a dimenziókat megtartva az

$$1 \text{ m} = (1 \text{ s})^\alpha \cdot \left(1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^\beta \cdot \left(1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{ K}}\right)^\gamma \cdot \left(1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^3 \text{ K}}\right)^\delta$$

egyenletet kapjuk, ami a keresett kitevőkre a

$$\beta + \delta = 0, \quad -3\beta + 2\gamma + \delta = 1, \quad \alpha - 2\gamma - 3\delta = 0, \quad -\gamma - \delta = 0$$

lineáris egyenletrendszer adja. Ennek megoldása

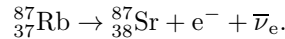
$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \text{tehát} \quad x \approx \sqrt{\frac{k_{k\delta} t}{\varrho_{k\delta} c_{k\delta}}}.$$

1.3b. A kapott képletbe beírva az adatokat,

$$x(5 \text{ s}) = 1,6 \text{ mm} \quad \text{és} \quad \frac{x}{R_M} = \frac{1,6 \text{ mm}}{130 \text{ mm}} = 0,012.$$

A meteorit kora

1.4a. Mivel a ^{87}Rb izotóp ^{87}Sr -ra való bomlásakor a tömegszám nem változik, a rendszám eggyel nő, negatív béta-bomlásról van szó, melynek egyenlete:



1.4b. A ^{87}Rb izotópok száma a bomlás miatt exponenciálisan csökken az idő függvényében, ugyanakkor a ^{87}Sr izotópok száma az elbomlott ^{87}Rb izotópok számával nő, tehát:

$$N_{87\text{Rb}}(t) = N_{87\text{Rb}}(0) e^{-\lambda t},$$

$$N_{87\text{Sr}}(t) = N_{87\text{Sr}}(0) + (N_{87\text{Rb}}(0) - N_{87\text{Rb}}(t)) = N_{87\text{Sr}}(0) + (e^{\lambda t} - 1) N_{87\text{Rb}}(t).$$

A második egyenletet elosztva a ^{86}Sr izotópok számával, megkapjuk az egyidejűségi egyenes egyenletét

$$\frac{N_{87\text{Sr}}(t)}{N_{86\text{Sr}}} = \frac{N_{87\text{Sr}}(0)}{N_{86\text{Sr}}} + (e^{\lambda t} - 1) \frac{N_{87\text{Rb}}(t)}{N_{86\text{Sr}}},$$

melynek meredeksége valóban $e^{\lambda t} - 1$.

1.4c. A grafikonról leolvasható, hogy a meredekség $a = e^{\lambda t} - 1 = \frac{0,712 - 0,700}{0,25} = 0,050$. A felezési idő és a bomlási állandó kapcsolata: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 4,9 \cdot 10^{10} \text{ év}$. Így a meteorit életkora:

$$\tau_M = \frac{\ln(1+a)}{\lambda} = \frac{\ln(1+a)}{\ln 2} T_{1/2} = 3,4 \cdot 10^9 \text{ év}.$$

Az Encke-üstökös, ahonnan a Maribo-meteorit származhat

A Nap körül keringő Encke-üstökös Naptól mért legkisebb és legnagyobb távolsága:

$$a_{\min} = 4,95 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad \text{és} \quad a_{\max} = 6,16 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

1.5. Az Encke üstökös pályájának fél nagytengelye $a_{\text{Encke}} = \frac{1}{2}(a_{\min} + a_{\max}) = 3,33 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Kepler III. törvényét alkalmazva a Földre és az Encke üstökösre azt kapjuk, hogy:

$$\frac{a_{\text{Encke}}^3}{t_{\text{Encke}}^2} = \frac{a_{\text{N-F}}^3}{t_{\text{Föld}}^2}, \quad \text{tehát} \quad t_{\text{Encke}} = \sqrt{\frac{a_{\text{Encke}}^3}{a_{\text{N-F}}^3}} \cdot t_{\text{Föld}} = 3,30 \text{ év} = 1,04 \cdot 10^8 \text{ s}.$$

Aszteroida-bechapódás hatása a Földre

1.6a. A Föld tehetetlenségi nyomatékát (a forgástengely irányában) elhanyagolhatóan befolyásolja az aszteroida becsapódása, hiszen a becsapódás helye a forgástengelyre esik. Tehát a Föld impulzusmomentumának és a forgástengelynek iránya az ütközés előtt és után is egybeesik. Ezért a forgástengely szögeltérülése helyett a Föld impulzusmomentum-vektorának maximális szögeltérülését határozzuk meg az impulzusmomentum megmaradását felhasználva.

A Föld saját impulzusmomentuma a megadott adatok alapján ismert:

$$N_F = \Theta_F \omega_F = 0,83 \frac{2}{5} m_F R_F^2 \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = 5,87 \cdot 10^{33} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}.$$

Az Északi sarkra becsapódó aszteroidának a Föld középpontjára vonatkoztatott impulzusmomentuma akkor maximális, ha az aszteroida a Föld forgástengelyére merőlegesen mozog, tehát a felszínre érintőlegesen csapódik be. Ekkor az aszteroida impulzusmomentuma:

$$N_{\text{aszt}} = m_{\text{aszt}} v_{\text{aszt}} R_F = 2,51 \cdot 10^{26} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}.$$

Ütközéskor a Föld impulzusmomentuma az aszteroida impulzusmomentumával változik, ezért a Föld impulzusmomentum-vektorának szögeltérülése akkor a legnagyobb, ha az aszteroida impulzusmomentuma merőleges a Földre. Érintőleges becsapódáskor ez a feltétel is teljesül. Így az impulzusmomentum (és egyben a forgástengely) maximális szögeltérülése:

$$\Delta\varphi \approx \text{tg}(\Delta\phi) = \frac{N_{\text{aszt}}}{N_F} = 4,27 \cdot 10^{-8} \text{ rad}.$$

Megjegyezzük, hogy a forgástengelynek a Föld felszínével való metszéspontja $R_F \Delta\varphi = 27 \text{ cm}$ -rel mozdul el. Azt is érdemes látni, hogy ez az elmozdulás merőleges az aszteroida becsapódási sebességére, hiszen az aszteroida impulzusmomentumának irányába esik.

1.6b. Az Egyenlítőre való függőleges becsapódáskor nem változik a Föld impulzusmomentuma, hiszen az aszteroida impulzusmomentuma a Föld középpontjára vonatkoztatva zérus. Azonban $\Delta\Theta_F = m_{\text{aszt}} R_F^2$ -tel megnő a Föld tehetetlenségi nyomatéka, és ez okozza a szögsebesség lassulását:

$$\Theta_F \omega_F = (\Theta_F + \Delta\Theta_F)(\omega_F + \Delta\omega_F), \quad \Delta\omega_F \approx -\frac{\Delta\Theta_F \omega_F}{\Theta_F} = -5,76 \cdot 10^{-14} \frac{1}{\text{s}}.$$

Így a Föld forgási periódusának növekedése:

$$\Delta T_F = 2\pi \left(\frac{1}{\omega_F + \Delta\omega_F} - \frac{1}{\omega_F} \right) \approx -2\pi \frac{\Delta\omega_F}{\omega_F^2} = 6,84 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

1.6c. Ebben az esetben az aszteroida és a Föld impulzusmomentuma egy egyenesbe esik, és becsapódáskor a Föld impulzusmomentuma és tehetetlenségi nyomatéka is megváltozik. A teljes rendszer impulzusmomentuma megmarad, tehát

$$\Delta\omega_F \approx \frac{-\Delta\Theta_F \omega_F \pm N_{\text{aszt}}}{\Theta_F} \approx \pm \frac{N_{\text{aszt}}}{\Theta_F} = \pm 3,11 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\text{s}}.$$

(Felhasználtuk, hogy $\frac{\Delta\Theta_F \omega_F}{N_{\text{aszt}}} \approx 5 \cdot 10^{-16} \ll 1$. A $\pm$ előjel azt veszi számításba, hogy az aszteroida impulzusmomentuma azonos vagy ellentétes irányú a Földével.) Innen a Föld forgási periódusának megváltozása:

$$\Delta T_F \approx -2\pi \frac{\Delta\omega_F}{\omega_F^2} = \mp 3,62 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Maximális becsapódási sebesség

1.7. A maximális becsapódási sebességet három lépésben határozzuk meg.

Az energiamegmaradás törvénye szerint a Nap gravitációs terében a Naptól a Föld pályasugarával megegyező távolságban az m tömegű test maximális v_1 sebességére

$$0 = \frac{1}{2} m v_1^2 - G \frac{m m_N}{a_{N-F}} \text{ teljesül, ahonnan } v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_N}{a_{N-F}}} = 42,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Szerencsés esetben a test éppen szembe halad a pályáján $v_F = \frac{2\pi a_{N-F}}{1 \text{ év}} = 29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel keringő Földdel, tehát a Föld vonatkoztatási rendszerében a sebessége $v_1 + v_F$.

Most a Föld vonatkoztatási rendszerében írhatjuk föl az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2}m(v_1 + v_F)^2 = \frac{1}{2}m(v_{\text{becs}}^{\text{max}})^2 - G \frac{m m_F}{R_F}.$$

(A Nap hatását elhanyagolhatjuk, hiszen a Föld közelében a Nap gravitációs potenciálja közel állandó.) Innen a becsapódás maximális sebessége:

$$v_{\text{becs}}^{\text{max}} = \sqrt{(v_1 + v_F)^2 + \frac{2Gm_F}{R_F}} = 72,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$