

Megoldás. Az O középpontból a körvonalon elhelyezkedő $A, B, C, \dots, F$ pontokba mutató helyvektorok legyenek rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{f}$.

Azt fogjuk megmutatni, hogy a megfelelő súlypontot és magasságpontot összekötő egyenes minden esetben átmegy azon a P ponton, amelynek helyvektora

$$\frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}).$$

Válasszuk ki például az ABC és a DEF háromszögeket. Ismert, hogy a köré írt kör középpontjából az ABC háromszög magasságpontjába mutató vektort $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ összegként írhatjuk fel. A DEF háromszög súlypontjába mutató vektor pedig $\overrightarrow{OS} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}}{3}$. Vegyük most a kör középpontjából a súlypontot és a magasságpontot összekötő szakasz súlyponthoz közelebbi $\bar{P}$ negyedelő pontjába mutató vektort. Ez a vektor felírható a két végpontba mutató vektor lineáris kombinációjaként:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OS} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}}{3} + \frac{1}{4} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}).$$

A kapott vektor kifejezése teljesen szimmetrikus a pontokba mutató helyvektorokra nézve, tehát a háromszögek választásától függetlenül a P ponton mindegyik – a magasságpontot a súlyponttal összekötő – szakasz áthalad. Azt is beláttuk, hogy ezeket a szakaszokat a közös P pont negyedeli.