

Megoldás. Fejezzük ki y -t az egyenletből:

$$\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2x}},$$

$$\sqrt{y} = \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x} - 3\sqrt{2}}, \quad y = \left(\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x} - 3\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{8x}{x + 18 - 6\sqrt{2x}}.$$

Mivel y egész szám, a jobb oldalon is egész szám áll. Mivel x is egész, a tört csak akkor lehet egész, ha $\sqrt{2x}$ racionális, ami akkor teljesül, ha egész is, tehát $2x$ négyzetszám. Ennek alapján $x = 2 \cdot k^2$, ahol k pozitív egész. Hasonlóan haladva

$$x = \left(\frac{3\sqrt{2y}}{\sqrt{y} - 2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{18y}{y + 8 - 4\sqrt{2y}},$$

tehát $2y$ is négyzetszám. $y = 2 \cdot m^2$, ahol m pozitív egész szám. Az eddigieket beírva az eredeti egyenletbe és $\sqrt{2}$ -vel szorozva diofantoszi egyenlethez jutunk:

$$\frac{3}{k} + \frac{2}{m} = 1.$$

Beszorzás és szorzattá alakítás után

$$3m + 2k = k \cdot m, \quad k \cdot m - 3m - 2k = 0,$$

$$(k - 3)m - 2(k - 3) = 6, \quad (k - 3)(m - 2) = 6.$$

Az osztópárokból kapjuk az egyenlet pozitív egész megoldásait:

$k - 3$	$m - 2$	k	m	x	y
1	6	4	8	32	128
2	3	5	5	50	50
3	2	6	4	72	32
6	1	9	3	162	18