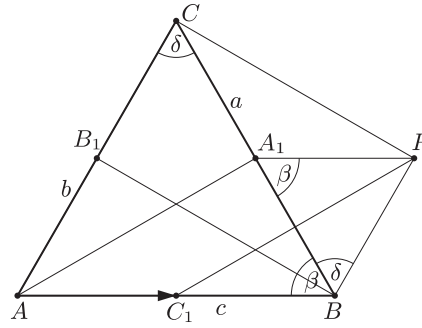


Megoldás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszögre $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{0}$ teljesül. Toljuk el az AA_1 szakaszt $\overrightarrow{AC_1}$ -gyel, ekkor A_1 képe P , A képe C_1 lesz. Az eltolás miatt $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1P}$.



1. ábra

Mivel $\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ és $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{0}$, továbbá $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1P}$, azért $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BB_1} = \mathbf{0}$. Tehát az AC_1PA_1 és $BPCB_1$ négyszögek paralelogrammák.

Az előbbiből következik, hogy $AB \parallel A_1P$, amiből $\beta = \angle ABA_1 = \angle BA_1P$, és $BP \parallel AC$, továbbá $\angle PBC = \angle BCA = \delta$. Vagyis $ABC \triangle \sim PA_1B \triangle$.

A PA_1B háromszög oldalai meghatározhatók a szögfelező-tétel segítségével:

$$A_1B = \frac{ac}{b+c}, \quad BP = CB_1 = \frac{ab}{a+c} \quad \text{és} \quad A_1P = AC_1 = \frac{bc}{a+b}.$$

Felhasználva az előző hasonlóságot:

$$\begin{aligned} a : b : c &= \frac{ac}{b+c} : \frac{ab}{a+c} : \frac{bc}{a+b}, \\ a : b &= \frac{ac}{b+c} : \frac{ab}{a+c} \implies a(b+c) = c(a+c) \implies ab = c^2, \\ a : c &= \frac{ac}{b+c} : \frac{bc}{a+b} \implies b(b+c) = c(a+b) \implies b^2 = ac. \end{aligned}$$

Az a, b, c számokra $ab = c^2$ és $b^2 = ac$ egyszerre teljesül. Összeszorozva $ab^3 = ac^3$, vagyis $b = c$, ezt visszahelyettesítve pedig $a = b = c$, vagyis a háromszög szabályos.