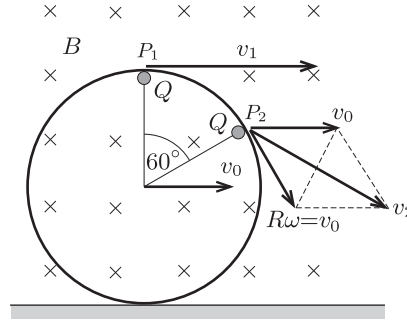


I. megoldás. a) A mágneses térben v sebességgel mozgó, Q töltésű golyóra ható erő a sebességvektorra is és a mágneses indukcióvektorra is merőleges, nagysága $F = QBv$. (Kihasználtuk, hogy $\mathbf{B}$ és $\mathbf{v}$ merőlegesek egymásra, és az egyértelműség kedvéért feltételezzük, hogy $Q > 0$.)

A golyók sebessége az R sugarú karika középpontjának v_0 nagyságú vízszintes sebességéből és a tiszta gördülés $R\omega = v_0$ nagyságú, érintő irányú sebességéből tehető össze (1. ábra). A P_1 pontban ez $v_1 = 2v_0$ nagyságú, a P_2 pontban pedig $v_2 = \sqrt{3}v_0$ (egy szabályos háromszög kétszeres magasságának megfelelő) nagyságú sebességvektort eredményez, így a kérdéses erők:

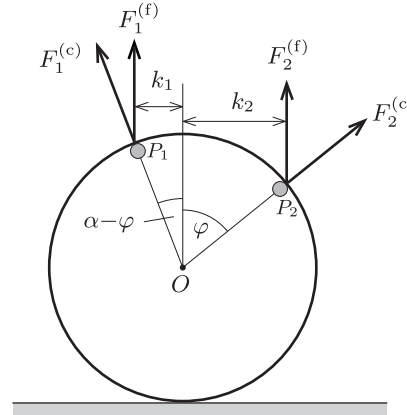
$$F_1 = QBv_1 = 2QBv_0,$$

$$F_2 = QBv_2 = \sqrt{3}QBv_0.$$



1. ábra

b) A karika bármely pontjának sebességvektora két vektor (a haladó mozgás és a forgómozgás kerületi sebességének) összegeként állítható elő. A karikához rögzített töltött testre ható mágneses Lorentz-erőt az egyes sebességkomponensekhez tartozó mágneses erők vektori összegeként is megkaphatjuk (szuperpozíció-elv). Tekintsük a karika azon helyzetét, amelyben a P_2 ponthoz tartozó sugár φ szöget zár be a függőlegessel, a P_1 -hez tartozó sugár ehhez képest α szöggel „lemerad” (2. ábra). Keressük φ azon értékét (vagy értékeit), amely(ek)nél az eredő erőnek *nincs* forgatónyomatéka a karika O középpontjára vonatkoztatva.



2. ábra

Az érintő irányú sebességvektorokhoz tartozó $F_1^{(c)}$ és $F_2^{(c)}$ erők sugár irányúak (centrálisak), az O pontra vonatkoztatott forgatónyomatékuk *nulla*. A vízszintes (transzlációs) sebességnek megfelelő Lorentz-erő függőleges irányú, és a nagysága a karika minden pontjánál ugyanakkora:

$$F_1^{(f)} = F_2^{(f)} = QBv_0.$$

Az erők eredőjének akkor lesz nulla a forgatónyomatéka, ha a megfelelő erőkarok megegyeznek:

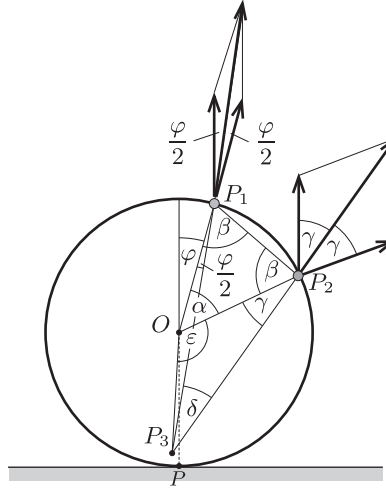
$$k_1 = k_2, \quad \text{vagyis} \quad \sin(\alpha - \varphi) = \sin \varphi.$$

Ebből – trigonometrikus átalakítások után – a $\tan(\alpha/2) = \tan \varphi$ egyenlet következik, amelynek megoldása:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \quad \text{vagy} \quad \varphi = 180^\circ + \frac{\alpha}{2} = 210^\circ.$$

Mindkét helyzetben a golyók a karika függőleges átmérőjére nézve *szimmetrikusan* helyezkednek el. Sebességük nagysága a „felső” helyzetben nagyobb, ilyenkor az eredő erő nagysága $(2 + \sqrt{3})Qv_0B$, az „alsó” szimmetrikus helyzetben pedig csak $(2 - \sqrt{3})Qv_0B$.

c) Tekintsük a karika azon helyzetét, amelyben a P_1 pontba húzott sugár φ szöget, a P_2 ponthoz tartozó sugár pedig $\varphi + \alpha$ szöget zár be a függőlegessel (3. ábra). Megmutatjuk, hogy a ponttöltésekre ható mágneses erők hatásvonalainak P_3 metszéspontja *tetszőleges* φ szög esetén a karika és a talaj P érintkezési pontjával esik egybe. (Az ábrát szándékosan kicsit eltorzítottuk, nehogy a bizonyítandó állítást a helyes ábráról indoklás nélkül olvassuk le.)



3. ábra

Használjuk ki, hogy az egyes ponttöltésekre ható mágneses erő két komponense (a tiszta gördülés miatt) ugyanakkora, eredőjük tehát felezi a közöttük lévő φ , illetve $2\gamma = \varphi + \alpha$ nagyságú szöget. Az OP_1P_2 háromszög egyenlő szárú, így

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

A $P_1P_2P_3$ háromszög belső szögeinek összegéből

$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} - \frac{\varphi}{2} + \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{\alpha + \varphi}{2} + \delta = 180^\circ, \quad \text{vagyis} \quad \delta = \frac{\alpha}{2}$$

adódik. Ezek szerint (a P_1P_2 körívhez tartozó középponti és kerületi szögek tétele alapján) a P_3 pont a karikán helyezkedik el, méghozzá éppen a karika függőleges átmérőjének alsó végpontjánál, hiszen az OP_2P_3 háromszög belső szögeinek összegéből (kihasználva, hogy $OP_3P_1 \angle = \varphi/2$):

$$\varepsilon + \frac{\varphi + \alpha}{2} + \frac{\varphi}{2} + \delta = 180^\circ,$$

tehát

$$\varepsilon + \alpha + \varphi = 180^\circ$$

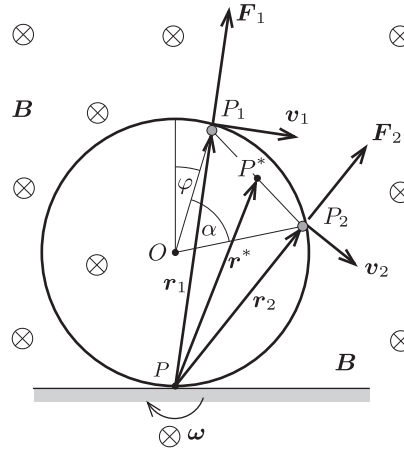
adódik. Ezzel beláttuk, hogy a P_3 pont P -vel esik egybe, vagyis a mágneses erők eredője a karika és a talaj érintkezési pontján halad át.

II. megoldás. A karika mozgása minden pillanatban leírható a talaj és a karika érintkezési pontja (a P pont) körüli forgómozgással. (Ezen a ponton átmenő és a karika síkjára merőleges tengelyt *pillanatnyi forgástengelynek* nevezik.) A szögsebesség nagysága nem függ a tengely választásától, értéke bármely tengely, így pl. a karika középpontján átmenő tengely körüli forgásra is $\omega = v_0/R$.

Jelöljük a P pontból P_1 -be és P_2 -be mutató vektorokat (a karika tetszőleges helyzeténél) $\mathbf{r}_1$ -gyel és $\mathbf{r}_2$ -vel, a P_1 és P_2 pontok közötti szakasz felezőpontját pedig P^* -gal (4. ábra). A P^* pont a karika O középpontjától $R(1 + \sqrt{3}/2)$ távolságra helyezkedik el, és a P pontból P^* -ba mutató vektor

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$

módon adható meg.



4. ábra

A karika ω szögsebessége az ábra síkjára merőleges (tehát $\mathbf{B}$ -vel párhuzamos) vektor, melynek segítségével a sebességek

$$\mathbf{v}_1 = \omega \times \mathbf{r}_1 \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = \omega \times \mathbf{r}_2,$$

a megfelelő Lorentz-erők pedig

$$\mathbf{F}_1 = Q\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} = Q(\omega \times \mathbf{r}_1) \times \mathbf{B}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{F}_2 = Q\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} = Q(\omega \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{B}.$$

Kihasználva, hogy $\mathbf{r}_{1,2}$ a karika síkjában fekvő vektorok, az egyes erők és az eredőjük így is felírható:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= Q\omega B \mathbf{r}_1, & \mathbf{F}_2 &= Q\omega B \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= Q\omega B (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = 2Q\omega B \mathbf{r}^*. \end{aligned}$$

a) A feladat kitűzési ábráján (vagyis a $\varphi = 0$ helyzetben) $|\mathbf{r}_1| = 2R$ és $|\mathbf{r}_2| = \sqrt{3}R$, így

$$|\mathbf{F}_1| = 2Qv_0 B, \quad \text{illetve} \quad |\mathbf{F}_2| = \sqrt{3}Qv_0 B.$$

b) A mágneses erők eredőjének akkor nincs forgatónyomatéka a karika középpontjára vonatkoztatva, amikor $\mathbf{r}^*$ átmegy az O ponton, vagyis amikor $\mathbf{r}^*$ függőleges irányú vektor. Ez két esetben, $\varphi = -\alpha/2 = -30^\circ$ -nál és $\varphi = \pi - \alpha/2 = 150^\circ$ -nál következik be. A töltött golyócskák mindkét helyzetben a függőleges átmérőre nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Az eredő erő nagysága

$$|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2| = 2Q\omega B |\mathbf{r}^*| = QBv_0 (2 \pm \sqrt{3}).$$

A pozitív előjel a felső, a negatív pedig az alsó szimmetrikus helyzetnek felel meg. Az eredő erő tehát a *felső helyzetben* lesz nagyobb.

c) Mivel mind az $\mathbf{F}_1$, mind pedig az $\mathbf{F}_2$ erő hatásvonala áthalad a P ponton, az eredő erő is ezen a ponton halad át, erre a pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka a karika tetszőleges helyzetében *nulla*.