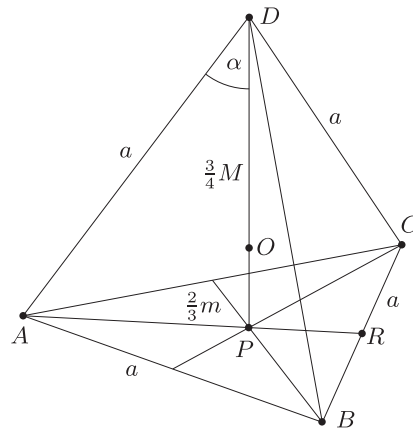


Megoldás. Jelöljük a szabályos tetraéder középpontjába helyezett ponttöltés *nagyságát* Q' -vel. Ez a töltés (az elrendezés szimmetriája miatt) nyilván egyensúlyban van. A többi töltés egyensúlyának vizsgálatához (ismét a szimmetriára hivatkozva) elegendő az egyik kiválasztott csúcspontban elhelyezkedő töltésre ható elektrosztatikus erők eredőjét kiszámítanunk, és annak eltűnését megkövetelnünk.



1. ábra

Ha a szabályos tetraéder oldalélének hosszát a -val jelöljük (1. ábra), akkor az oldallapjainak magassága

$$m = \overline{AR} = \frac{\sqrt{3}}{2} a,$$

az oldallap súlypontjának és az egyik csúcsának távolsága pedig

$$\overline{AP} = \frac{2}{3} m = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Eszerint a tetraéder magassága

$$M = \overline{DP} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} m\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} a.$$

Az $\overline{AO} = \overline{OD}$ feltételből megkapható, hogy a tetraéder középpontja a magasságvonal negyedénél található, vagyis a tetraéder középpontjának és az egyik csúcsának távolsága

$$\overline{DO} = \frac{3}{4} M = \sqrt{\frac{3}{8}} a,$$

az 1. ábrán látható α szögre pedig fennáll:

$$\cos \alpha = \frac{M}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az egyik csúcspontban lévő Q nagyságú töltésre bármelyik másik csúcsnál található töltés

$$F = k \frac{Q^2}{a^2}$$

nagyságú taszítóerőt fejt ki. A három másik csúcs töltései által kifejtett erő eredője a szimmetria miatt a tetraéder középpontjával ellentétes irányba mutató és

$$F^* = 3F \cos \alpha = 3k \frac{Q^2}{a^2} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

nagyságú (2. ábra). Ugyanilyen irányú és

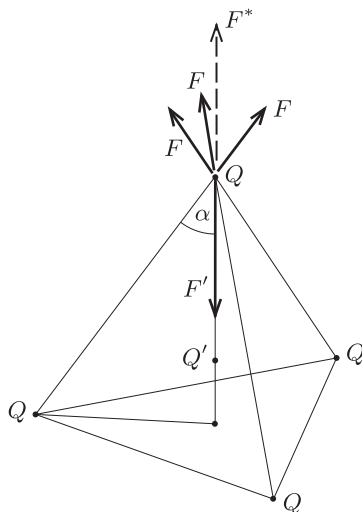
$$F' = k \frac{QQ'}{\left(\frac{3M}{4}\right)^2} = \frac{8k}{3} \frac{QQ'}{a^2}$$

nagyságú vonzóerőt fejt ki a tetraéder középpontjában elhelyezkedő Q' nagyságú, Q -val ellentétes előjelű töltés.

Az erőegyensúly feltétele: $F' = F^*$, ami

$$Q' = \sqrt{\frac{27}{32}} Q \approx 0,92 Q$$

esetén teljesül.



2. ábra

A töltésrendszer teljes kölcsönhatási energiája a töltéspárok megfelelő energiáinak összege:

$$W = 6k \frac{Q^2}{a} - 4k \frac{QQ'}{\left(\frac{3M}{4}\right)} = k \frac{Q}{a} \left(6Q - 4\sqrt{\frac{8}{3}} Q' \right),$$

ami Q' fentebb kiszámított értékének behelyettesítésével – érdekes módon – nullának adódik:

$$W = k \frac{Q^2}{a} \left(6 - 4\sqrt{\frac{8}{3}} \sqrt{\frac{27}{32}} \right) = 0.$$

Megjegyzés. Belátható, hogy *bármely* töltésrendszer elektrosztatikus kölcsönhatási energiája *nulla*, ha a rendszer elemei (elektrosztatikus erőhatások szempontjából) egyensúlyban vannak. Ilyen esetben ugyanis a rendszer méreteit – kis lépésben – arányosan megnövelhetjük, még hozzá úgy, hogy eközben nem kell munkát végeznünk (hiszen a rendszer minden elemére ható eredő erő nulla). Ezt a méretnövelést egészen addig folytathatjuk, ameddig a töltések már nagyon távol („végtelen” messze) kerülnek egymástól, vagyis amikor a kölcsönhatási energiájuk nullává válik. Mivel mindezt munkavégzés nélkül tehetjük meg, az energia az eredeti állapotban is nulla kellett, hogy legyen.