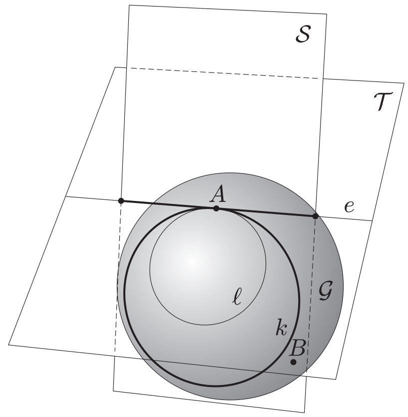
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy pontosan egy ilyen kör létezik.

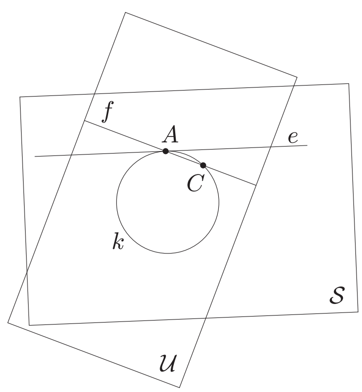
Legyen a $\mathcal{G}$ gömbfelületen A a k-ra illeszkedő, B pedig a másik adott pont, jelölje $\mathcal{S}$ a k-t tartalmazó síkot, e pedig a k kör A-beli érintőegyenesét az $\mathcal{S}$ síkban. Mivel $\mathcal{G} \cap \mathcal{S} = k$, az e egyenes A-tól különböző pontjai a gömbön kívül vannak, tehát e a gömböt is érinti (*1. ábra*). Ezért ha valamely $\mathcal{T}$ sík tartalmazza e-t, továbbá $\mathcal{G}$-t az ℓ körvonalban metszi, akkor ℓ-nek az A-beli érintője is e, vagyis ℓ az A-ban érinti k-t.



1. ábra

Ha tehát a B pont és az e egyenes által meghatározott síkot választjuk $\mathcal{T}$-nek, akkor ez a sík a gömbfelület két különböző pontját is tartalmazza, ezért $\mathcal{G} \cap \mathcal{T}$ körvonal lesz, s az előzőek alapján ez a kör A-ban érinti k-t.

Ha viszont valamely m körvonal olyan, hogy az m-et $\mathcal{G}$-ből kimetsző $\mathcal{U}$ sík átmegy A-n is és B-n is, de nem tartalmazza e-t, akkor az $\mathcal{S} \cap \mathcal{U} = f$ egyenes benne van az $\mathcal{S}$ síkban és átmegy a k kör A pontján, de különbözik a k kör A-beli érintőjétől. Ezért f egy A-tól különböző C pontban is metszi k-t (*2. ábra*). Ez a C pont rajta van a $\mathcal{G} \cap \mathcal{U} = m$ körvonalon is, azaz m-nek és k-nak legalább (könnyen meggondolható, hogy pontosan) két közös pontja van, tehát nem érintik egymást.

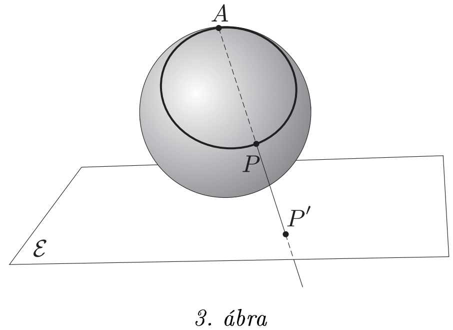


2. ábra

Ezzel állításunkat beláttuk.

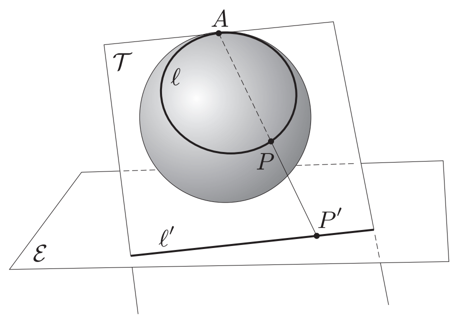
II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $\mathcal{E}$ a gömb A-val átellenes pontjában a gömb érintősíkja. Feladatunkat a *sztereografikus projekciónak* nevezett transzformáció segítségével oldjuk meg.

Rendeljük hozzá a gömbfelszín tetszőleges, A-tól különböző P pontjához a $P' = \mathcal{E} \cap AP$ pontot (*3. ábra*). Megmutatjuk, hogy ez a megfeleltetés bijekció a $\mathcal{G} \setminus \{A\}$ és $\mathcal{E}$ ponthalmazok közt. Ha $P \in (\mathcal{G} \setminus \{A\})$ tetszőleges pont, akkor az AP egyenes nem párhuzamos $\mathcal{E}$-vel, ezért egyértelműen létezik a $P' \in \mathcal{E}$ pont, ha pedig $Q' \in \mathcal{E}$ tetszőleges pont, akkor az AQ' egyenes nincs benne a gömb A-beli érintősíkjában, mert az a sík párhuzamos $\mathcal{E}$-vel, ezért az egyenes két pontban metszi a gömbfelszínt, tehát egyértelműen létezik AQ'-nek és $\mathcal{G}$-nek az A-tól különböző Q metszéspontja.



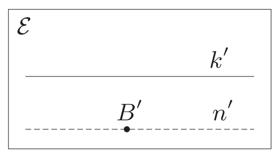
3. ábra

Ha ℓ olyan $\mathcal{G}$-n lévő körvonal, mely átmegy A-n, akkor a megfeleltetésnél kapott ℓ' képe egy egyenes, mert ha ℓ-et a $\mathcal{T}$ sík metszi ki $\mathcal{G}$-ből, akkor az A-t az ℓ pontjaival összekötő egyenesek benne vannak $\mathcal{T}$-ben, ezért ℓ' éppen az $\mathcal{E} \cap \mathcal{T}$ egyenes (*4. ábra*). Megfordítva, ha m' tetszőleges egyenes $\mathcal{E}$-ben, akkor az A és m' által meghatározott $\mathcal{U}$ sík a gömbfelszínt egy olyan A-n átmenő m körvonalban metszi, melyenek a megfeleltetésnél kapott képe az m' egyenes. Tehát a megfeleltetés bijekció a $\mathcal{G}$ gömbfelszín A pontján átmenő körvonalai és az $\mathcal{E}$ sík egyenesei közt.



4. ábra

Feladatunk megoldása ezután már egyszerű. Legyen a megfeleltetésnél k képe a k' egyenes, B képe pedig a k'-re nem illeszkedő B' pont. A gömbfelszín valamely n köre pontosan akkor érinti k-t A-ban, ha $k \cap n = \{A\}$, azaz ha $k' \cap n' = \emptyset$, vagyis ha a k' és n' egyenesek párhuzamosak (*5. ábra*). A B' ponton át pontosan egy k'-vel párhuzamos egyenes húzható, ezért pontosan egy olyan kör van a gömbön, amely A-n is és B-n is átmegy és érinti k-t.



5. ábra

Megjegyzés. A sztereografikus projekciónak sok egyéb érdekes tulajdonsága is van. Például a gömbfelszín A-n át nem menő köreinek képe kör lesz $\mathcal{E}$-n. A sztereografikus projekciót térképek készítésénél is gyakran használják, ott van szükség a gömbfelszín síkon való megjelenítésére.