

Megoldás. A feladat kérdésére a válasz igenlő.

(1) Legyen k pozitív egész szám. Először azt mutatjuk meg, hogy az első n pozitív egész k -adik hatványának összegét n -nek egy $k + 1$ -ed fokú polinomja adja meg.

Indukcióval bizonyítunk; $k = 1$ -re ez ismert. Tegyük fel, hogy $k - 1$ -ig igaz az állítás. Írjuk fel a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} (0 + 1)^{k+1} &= 1^{k+1}, \\ (1 + 1)^{k+1} &= 2^{k+1}, \\ ((n - 1) + 1)^{k+1} &= n^{k+1}, \\ (n + 1)^{k+1} &= (n + 1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Mindegyik egyenlőség bal oldalát kifejtethetjük a binomiális tétel szerint. Ha utána ezeket összeadjuk, a $k + 1$ -edik hatványok a rendezés során egy tag $((n + 1)^{k+1})$ kivételével kiesnek. Jelölje (minden t -re) a $\sum_{i=1}^n i^t$ összeget S_t , ekkor

$$\binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} S_1 + \binom{k+1}{k+1} n = (n+1)^{k+1},$$

azaz

$$S_k = \frac{1}{k+1} \left((n+1)^{k+1} - \left(\binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} S_1 + \binom{k+1}{k+1} n \right) \right).$$

A jobb oldalon a kapcsos zárójelben szereplő összeg minden tagja az indukciós feltevés szerint előáll az n egy legfeljebb k -ad fokú polinomjaként. Ezzel (1)-et beláttuk.

(2) Legyen k pozitív egész. Belátjuk, hogy a $[0; 1]$ intervallum felbontható véges sok racionális végpontú szakaszra, és e szakaszok tíz színnel kiszínezhetők úgy, hogy minden, legfeljebb k -ad fokú f polinomra, ha vesszük mindegyik $[a; b]$ szakasznál az $f(b) - f(a)$ különbségeket, és az azonos színű szakaszokhoz tartozókat összeadjuk, a kapott tíz összeg egyenlő.

Ha c tetszőleges nemnulla konstans, akkor az $f(cx)$ és $f(x + c)$ polinomok foka is annyi, mint az f polinomé; így elég az állításunkat $[0; 1]$ helyett valamely alkalmas zárt intervallumra belátnunk; ezt a k szerinti indukcióval tesszük. Nyilvánvalóan $k = 1$ -re jó felbontás az, hogy a tizedelő pontok által meghatározott szakaszokat vesszük. Tegyük fel ezután, hogy (2) teljesül $k = t$ -re. Tekintsük a $[0; 1]$ intervallum egy ennek megfelelő felosztását és színezését; jelölje a színeket s_0, s_1, \dots, s_9 . Másoljuk át a felosztást rendre az $[1; 2], \dots, [9; 10]$ intervallumokra, viszont változtassuk meg ezeken a színezést úgy, hogy az $[i; i + 1]$ -en s_v helyébe s_{v+i} lépjen (minden $0 \leq i, v \leq 9$ -re; itt $v + i$ természetesen modulo 10 értendő). Ha ezután f egy $t + 1$ -ed fokú polinom (aminek a főegyütthatója c), akkor minden $0 \leq i \leq 9$ -re felírható $f = c(x - i)^{t+1} + g_i(x)$ alakban, ahol a g_i polinomok legfeljebb t -ed fokúak. Ekkor $f(x) = m(x) + r(x)$, ahol

$$m(x) = c(x - i)^{t+1}, \quad \text{és} \quad r(x) = g_i(x), \quad \text{ha} \quad x \in [i; i + 1].$$

A $[0; 10]$ intervallumnak az így kapott felosztása és színezése mind az $m(x)$, mind pedig az $r(x)$ függvény számára megfelelő: $r(x)$ -nek azért, mert az indukciós feltevés miatt mindegyik $[i; i + 1]$ szakaszon is ugyanannyi az egyes színekhez tartozó különbségek összege. A konstrukció miatt pedig a $[0; 10]$ szakaszon az $m(x)$ függvény szerinti különbségek összege bármelyik színben egyenlő a cx^{t+1} függvény $c(1^{t+1} - 0^{t+1}) = c$ „megváltozásával” a $[0; 1]$ -en, mivel (az egységszakaszokon a színek ciklikus változtatása miatt) minden, a $[0; 1]$ felosztásában szereplő szakasz tíz eltoltja tíz különböző színnel van kifestve (és $m(x)$ periodikus 1 szerint). Ezzel a (2) állítást beláttuk.

Vegyük a $[0; 1]$ szakasznak (2) alapján egy jó felosztását és színezését $k = 11$ -re. Az osztópontok racionálisak – nagyítsuk fel az elrendezést úgy, hogy egészek legyenek. Tekintsük azt a 11-ed fokú f polinomot, amely (1) szerint az első n pozitív egész szám 10-edik hatványának összegképletét adja meg. Az f két egész helyen felvett értékének az eltérése egymást követő tizedik hatványok összege. Így bebizonyítottuk az állítást.