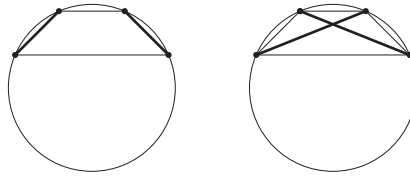


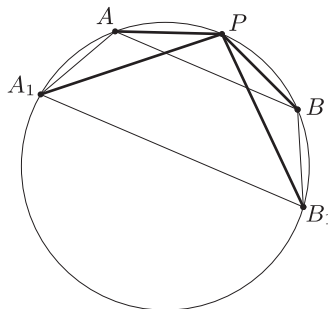
Megoldás. Egy szabályos 27-szög csúcsai a sokszög köré írható kör pontjai is egyben. A csúcsok által meghatározott húrok között 13 különböző hosszúság fordul elő. A 27 csúcsból kiválasztott bármely 7 csúcs rajta van ezen a körön, így egy csúcsából legfeljebb két, egymással megegyező hosszúságú szakasz indulhat ki, és a csúcsai által meghatározott szakaszok között legfeljebb 13 különböző hosszúság fordul elő. A 7 pont által meghatározott hétszögnek összesen $\binom{7}{2} = 21$ oldala és átlója van, ezek egyben a köré írható kör húrjai.

Ha a 21 húr között van két egyforma hosszúságú, amelyek a hétszög két-két különböző csúcsát kötik össze, akkor ez a négy csúcs húrtrapézt határoz meg (1. ábra).



1. ábra

Ha a hétszög csúcsai között van olyan P pont, amiből a $PA = PA_1$ és $PB = PB_1$, páronként egyenlő hosszúságú húrok indulnak ki (2. ábra), akkor AA_1B_1B húrnegyszöget határoz meg.



2. ábra

Ha a hétszögben van három egyforma hosszúságú szakasz, akkor biztosan van az 1. ábrának megfelelő elrendezésű trapéz, hiszen nem lehet mindhárom szakasznak közös csúcsa.

Tekintsük tehát azokat az eseteket, melyekben minden hosszúság legfeljebb kétszer fordul elő. A 21 húr között van legalább 8 olyan, amelyik valamelyik másikkal megegyező hosszúságú, hiszen legfeljebb 13 különböző hosszúságú van közöttük, tehát a maradék 8 húr hossza már előfordult a 13 között. Ha van az 1. ábrának megfelelő húr-pár, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben az összes olyan szakasz, amelynek hossza valamelyik másikéval megegyezik, párokba rendezhető úgy, hogy az egy párba tartozó szakaszoknak van közös csúcsa. Mivel $13 + 7 < 21$, így a 7 csúcs valamelyikéből több, egymással egyező hosszúságú húr-pár indul ki, ami a 2. ábrának megfelelő helyzet, így ekkor is készen vagyunk.