

I. megoldás.

A háromszög három csúcsa legyen majd A , B és C ,

A derékszög pedig forduljon az AB él felé.

A vizsgált szögfelező induljék teszem azt A -ból,
Ezzel semmit sem vonunk le az általánosságból.

Ez messe a BC oldalt a T -vel jelölt pontban,
 C AT -re vetítettjének a P nevet adtam.

Ekkor P magasságtalppont CAT átfogóján,
Tehát AT belső pontja, ez evidens állítmány.

Mivel az APC -ben P szöge 90 fokos,
Thalész szerint a köréírt körközpont AC -n tapos.

Vegyünk hát fel párhuzamot AB -vel P -n keresztül,
Ez elmetszi AC oldalt O -ban, valahol belül.

Legyen CAB szög α , COP is ennyi lesz,
Feleennyit a CAP szög is – én mondom – kitesz.

Már csak egy sor van mi fontos, már csak ennyi kell ide:
A kerületi és középponti szögek tétele.

Hiszen így csakis O lehet CAP középpontja,
Mínt hogy egyrészt AC -n nyugszik, másrészt COP α .

Ennek pedig számunkra van egy szép következménye:
 O AC felezőpontja, a középvonal vége.

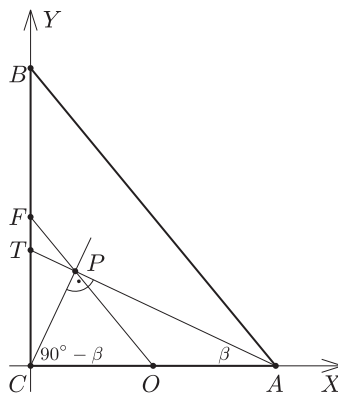
Így mivel párhuzamos az AB oldallal OP ,
 P a középvonalnak egy pontja, készen vagyunk, QED.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $\beta = \angle TAC = \alpha/2$. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy annak X tengelye a CA , az Y tengelye a CB egyenes legyen, az egységet pedig válasszuk úgy, hogy az A pont koordinátái $(2; 0)$ legyenek. Ekkor $T = (0; 2 \operatorname{tg} \beta)$,

$$B = (0; 2 \operatorname{tg} 2\beta) = \left(0; \frac{4 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}\right)$$

és a CB befogó F felezőpontjának koordinátái

$$\left(0, \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}\right).$$



Mivel $\angle PCO = 90^\circ - \beta$, azért a CP egyenes egyenlete

$$Y = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta)X = \operatorname{ctg} \beta X,$$

tehát $P = (p; p \operatorname{ctg} \beta)$ alakban írható. Az AT egyenes tengelymetszeti egyenlete

$$1 = \frac{X}{2} + \frac{Y}{2 \operatorname{tg} \beta},$$

erre illeszkedik a P pont, ezért

$$1 = \frac{p}{2} + \frac{p \operatorname{ctg} \beta}{2 \operatorname{tg} \beta} = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta}\right).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$P = \left(\frac{2 \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right).$$

Feladatunk állításának igazolásához már csak azt kell megmutatnunk, hogy P koordinátái kielégítik az OF egyenes egyenletét. Ezt az egyenletet ismét a tengelymetszeteket felhasználva írhatjuk fel. Mivel $O = (1; 0)$, az egyenlet

$$1 = \frac{X}{1} + \frac{Y}{\frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

Vagyis azt kell belátnunk, hogy

$$1 = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{\frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

Ez viszont azonnal adódik az emeletes tört egyszerűsítésével.