Megoldás. Tudjuk, hogy n pozitív egész, 2^n+1 pedig prímszám. Ha létezne olyan p páratlan prímszám, amelyre $p \mid n$, akkor lenne olyan $x \in \mathbb{N}$, hogy $n = p \cdot x$.

Így $2^n + 1 = 2^{p \cdot x} + 1 = (2^x)^p + 1^p$. Az ismert azonosság alapján

$$2^x + 1 \mid (2^x)^p + 1^p,$$

és $1 < 2^x + 1 < 2^n + 1$, tehát valódi osztó, így ekkor $2^n + 1$ nem lehetne prímszám. Ellentmondásra jutottunk, tehát n-nek nem lehet páratlan osztója, így $n = 2^k$ alakú szám.

Vizsgáljuk meg az ilyen alakú kitevők esetén a maradékokat 240-el osztva:

$$\begin{aligned}
2^{2^0} + 1 = 3 \equiv 3 \pmod{240},\\
2^{2^1} + 1 = 5 \equiv 5 \pmod{240},\\
2^{2^2} + 1 = 17 \equiv 17 \pmod{240},\\
2^{2^3} + 1 = 257 \equiv 17 \pmod{240},\\
2^{2^4} + 1 = 65\,537 \equiv 17 \pmod{240}.
\end{aligned}$$

Sejtés: ezután mindig 17 lesz a maradék.

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5.$$

Tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy a $2^{2^k} + 1$ alakú számok milyen maradékot adnak 2^4-nel, 3-mal és 5-tel osztva.

Legyen $A = 2^{2^k} + 1$.

Ha $k \geq 2$, akkor $2^4 \mid 2^{2^k}$, így $2^4 \mid A - 1 \Rightarrow 2^4 \mid A - 1 - 16 \Rightarrow 2^4 \mid A - 17$.

$$\begin{aligned}
A = 2^{2^k} + 1 = (3-1)^{2^k} + 1 \equiv (-1)^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{3} \implies\\
\implies 3 \mid A - 2 \implies 3 \mid A - 2 - 15 \implies 3 \mid A - 17.
\end{aligned}$$

A 2-hatványok végződései pozitív kitevő esetén rendre 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6 stb. Tehát $A = 2^{2^k} + 1$ végződése 7, így $A - 17$ végződése 0, vagyis $5 \mid A - 17$.

Így $k \geq 2$ esetén a $2^n + 1$ prímszámnak mindig 17 lesz a maradéka 240-nel osztva.

Tehát 3, 5 és 17 lehet a maradék.