

I. megoldás. A bizonyításban felhasználjuk a vektorok összeadására vonatkozó paralelogramma szabályt, amely miatt $\vec{LQ} = \vec{LP} + \vec{LR}$, illetve $\vec{LT} = \vec{LA} + \vec{LS}$.

Felhasználjuk még, hogy az $\vec{x}$ és $\vec{y}$ vektor felezőpontjába mutató $\vec{v}$ vektorra $\vec{v} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2}$, amiből $\vec{y} = 2\vec{v} - \vec{x}$.

Azt fogjuk bizonyítani, hogy az A pontot sorra tükrözve a P , Q , R , S és T pontokra, az utolsó tükrökép maga az A pont lesz.

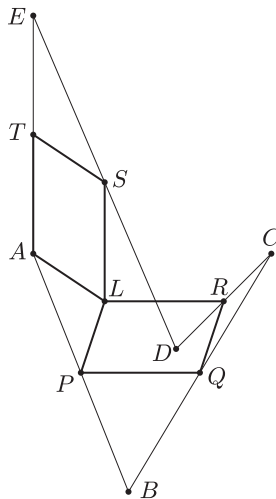
Jelölje tehát az A pont tükröképét a P pontra B . Ekkor $\vec{LB} = 2\vec{LP} - \vec{LA}$.

A B pont tükröképe a Q pontra legyen C . Ekkor

$$\vec{LC} = 2\vec{LQ} - \vec{LB} = 2(\vec{LP} + \vec{LR}) - (2\vec{LP} - \vec{LA}) = 2\vec{LR} + \vec{LA}.$$

A C pont tükröképe az R pontra legyen D . Ekkor

$$\vec{LD} = 2\vec{LR} - \vec{LC} = 2\vec{LR} - (2\vec{LR} + \vec{LA}) = -\vec{LA}.$$



A D pont tükröképe az S pontra legyen E . Ekkor

$$\vec{LE} = 2\vec{LS} - \vec{LD} = 2\vec{LS} + \vec{LA}.$$

Végül az E pont tükröképét a T pontra jelölje F . Ekkor

$$\vec{LF} = 2\vec{LT} - \vec{LE} = 2(\vec{LA} + \vec{LS}) - (2\vec{LS} + \vec{LA}) = \vec{LA}.$$

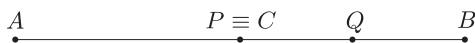
Vagyis $\vec{LF} = \vec{LA}$, és így valóban $F \equiv A$, tehát az így kapott $ABCDE$ ötszög megfelelő.

II. megoldás. Az A pont tükröképe a P pontra legyen a B pont, a B pont tükröképe a Q pontra pedig a C pont. Ha létrejön az ABC háromszög, akkor abban az AB oldal felezőpontja P , a BC oldalé pedig Q , így $PQ \parallel AC$ és $PQ = AC/2$. Mivel $PQRL$ paralelogramma, vagyis szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, ezért ebből $LR \parallel AC$ és $LR = AC/2$ következik.

Ha nem jön létre háromszög, akkor több eset lehetséges. Az $LSTA$ és a $PQRL$ paralelogrammáknak azonos a körüljárásuk és az L ponton kívül nincs közös részük, ezért az A , P és Q pontok csak APQ sorrendben követhetik egymást. Minden esetben a pontok egy egyenesre esnek, így $PQ \parallel AC$, tehát $LR \parallel AC$ is teljesülni fog. Belátjuk, hogy $LR = PQ = AC/2$ is mindig igaz. Legyen $AP = PB = a$ és $BQ = QC = b$.

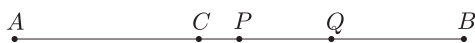
I. eset: $AP = PQ$. Ekkor $Q \equiv B \equiv C$, és így $AC = 2PQ$.

II.1. eset: $AP > PQ$ és $PQ = AP/2$.



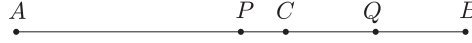
Ekkor $AC = AP = 2PQ$.

II.2. eset: $PQ < AP/2$.

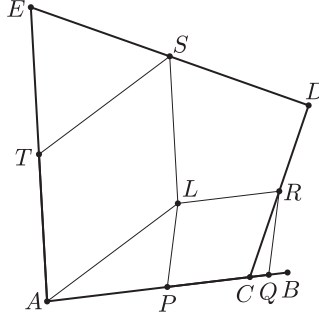


Ekkor $PQ = PB - QB = a - b$ és $AC = AB - CB = 2a - 2b$, tehát valóban $AC = 2PQ$.

II.3. eset: $AP > PQ > AP/2$.



Ekkor $PQ = PB - QB = a - b$ és $AC = AB - CB = 2a - 2b$, vagyis $AC = 2PQ$.



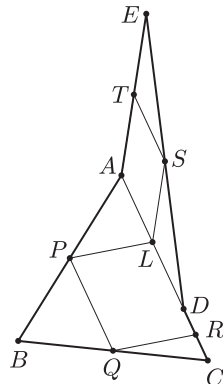
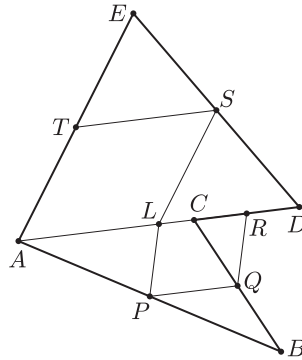
III. eset: $PQ > AP$.



Itt is teljesül, hogy $AC = 2PQ$.

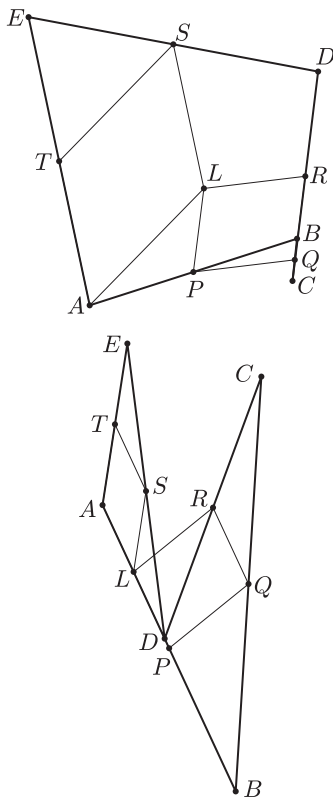
Most induljunk el a másik irányba: tükrözzük az A pontot a T pontra, a tükörkép legyen E , majd az E pontot az S pontra, a tükörkép legyen D . Az ADE háromszögben TS középvonal, így párhuzamos AD -vel és feleakkora. Mivel $TS \parallel AL$ és $TS = AL$ is teljesül, ezért $AL \parallel AD$ és $AL = AD/2$, így L az AD felezőpontja.

Tehát az A pont tükörképe L -re a D pont. Legyen a D pont tükörképe az R pontra a C' pont. Ha A, L, D és R nem esnek egy egyenesre, akkor az ADC' háromszögben LR középvonal, így párhuzamos AC' -vel és feleakkora. Mivel ugyanez igaz az AC -re is, ezért $C \equiv C'$. Ha a négy pont egy egyenesre esik, akkor a pontok sorrendje lehet $RALD$, $ARLD$, $ALRD$ vagy $ALDR$. Minden esetet meg lehet vizsgálni attól függetlenül, hogy valójában létrejöhetnek-e. Mindegyikben megkapjuk, hogy $LR \parallel AC'$ és feleakkora. Tehát ekkor is $C \equiv C'$. Két ilyen esetet mutat az alábbi két ábra.

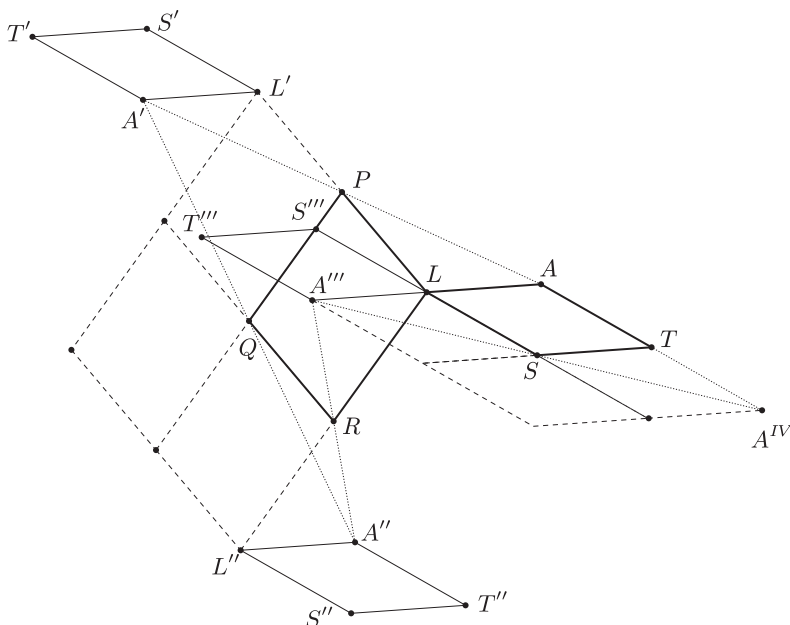


Az így kapott $ABCDE$ négyszög tehát megfelelő. A pontokat megkaphatjuk úgy is, hogy sorban tükrözzünk a P , Q , R , S és T pontokra.

Megjegyzés. Nagyon sokan nem vizsgálták meg a megoldásukban felhasznált háromszögekre (pl. BCD , ABD vagy ACD) azt, amikor a csúcsaik egy egyenesre esnek. Lásd például az alábbi két elfajuló esetet.



III. megoldás. A feladat lényegében azt mondja, hogy ha az A csúcsot tükrözzük a P , Q , R , S , majd T pont-ra, akkor önmagát kapjuk vissza. Hogy jobban látszódjon a tükrözés, tükrözzük az egész $ALST$ paralelogrammát a pontokra. A paralelogrammán belül is nézzük az L pontot, hiszen az mindkét paralelogrammának csúcsa, így talán könnyebb dolgunk lesz.



Az első tükrözésnél az L tükörképe L' , amiről tudjuk, hogy illeszkedik az LP félegyenesre és $PL = PL'$. Az $ALST$ képét jelölje $A'L'S'T'$. Ez az $ALST$ -vel egyező állású (vagyis minden oldala párhuzamos annak megfelelő

oldalaival), ám körüljárási iránya azzal ellentétes. Ha ezt a paralelogrammát tükrözzük a Q pontra, akkor az eredetivel egyező állású és körüljárású $A''L''S''T''$ paralelogrammát kapjuk, melyben L'' illeszkedik a $PQRL$ által meghatározott paralelogramma rácsra, azon belül az LR félegyenesre is és $LR = LR''$.

Ebből következik, hogy ha az $A''L''S''T''$ négyszöget az R pontra tükrözzük, akkor L'' képe az L pont lesz, valamint az így kapott $A'''LS'''T'''$ paralelogramma az $ALST$ -vel egyező állású és ellentétes körüljárású lesz.

A továbbiakban vizsgáljuk csak az A''' pont és tükörképei helyzetét. Ehhez rajzoljuk meg az $ALST$ által meghatározott paralelogramma rácsot. Mivel $A'''LS'''T'''$ az $ALST$ -vel egyező állású (és vele egybevágó), így maga is illeszkedik erre a rácsra.

Az A''' pontot az S pontra tükrözve az A^{IV} pontot kapjuk, amely illeszkedik az AT félegyenesre és $TA = TA^{IV}$. Így nyilván az A^{IV} tükörképe a T pontra az A pont, tehát az $AA'A''A'''A^{IV}$ egy megfelelő ötszög ($A' \equiv B$, $A'' \equiv C$, $A''' \equiv D$ és $A^{IV} \equiv E$).