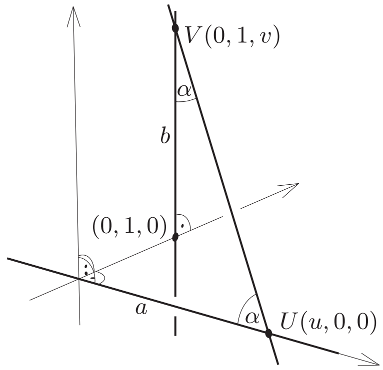
I. megoldás. Legyen a két kitérő egyenes a és b, a keresett harmadik egyenes c. Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az x tengely essen egybe a-val, a z tengely legyen párhuzamos b-vel, az y tengely egyenese pedig legyen a és b normáltranzverzálisa. Válasszuk meg az egységet úgy, hogy b átmenjen a $(0,1,0)$ ponton (*1. ábra*). Legyen $U = a \cap c$ és $V = b \cap c$. Ekkor U koordinátái $(u, 0, 0)$, V koordinátái pedig $(0, 1, v)$, ahol u és v valós számok. Az a, b és c egyenesek egy-egy irányvektora $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ és $\mathbf{c} = (-u, 1, v)$.



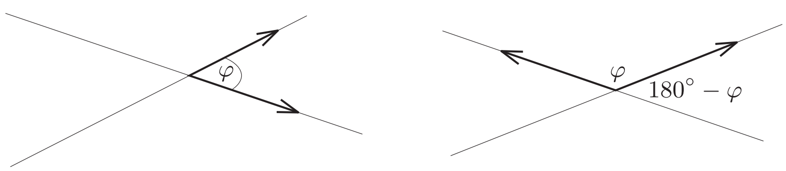
1. ábra

Két egyenes hajlásszöge vagy megegyezik az irányvektoraik hajlásszögével, vagy azt 180°-ra egészíti ki (*2. ábra*). Tetszőleges φ szög esetén $\cos^2\varphi = \cos^2(180° - \varphi)$, ezért c pontosan akkor tesz eleget a feladat feltételeinek, ha

$$\cos^2\alpha = \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})\sphericalangle = \cos^2(\mathbf{b}, \mathbf{c})\sphericalangle$$

teljesül. A vektorok szögének koszinuszát viszont a skaláris szorzatukból könnyen kiszámolhatjuk, hiszen tetszőleges $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ és $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ vektorok esetén

$$\cos(\mathbf{s}, \mathbf{t})\sphericalangle = \frac{\mathbf{st}}{|\mathbf{s}|\,|\mathbf{t}|} = \frac{s_1t_1 + s_2t_2 + s_3t_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}\,\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}.$$



2. ábra

Így azt kapjuk, hogy c pontosan akkor jó egyenes, ha

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{\mathbf{ac}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}|}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{bc}}{|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|}\right)^2,$$

azaz felhasználva, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, ha $(-u)^2 = v^2$, vagyis ha $u = \pm v$. Ekkor

$$\cos^2\alpha = \frac{u^2}{2u^2 + 1} < \frac{1}{2}, \tag{1}$$

vagyis $\cos\alpha < 1/\sqrt{2}$, ezért $\alpha > 45°$.

Tehát ha $\alpha \le 45°$, akkor nincs a feltételeknek eleget tevő c egyenes. Ha viszont $\alpha > 45°$, akkor négy megfelelő egyenes van. Ekkor ugyanis az (1) egyenletből u^2-et kifejezve kapjuk, hogy

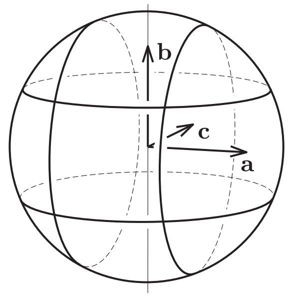
$$u^2 = \frac{\cos^2\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha} > 0,$$

ha tehát

$$w = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha}},$$

akkor a $(\pm w, 0, 0)$ pontok bármelyikét a $(0, 1, \pm w)$ pontok bármelyikével összekötő egyenes α szöget fog bezárni a-val is és b-vel is.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. A feltétel szerint **a** és **c** által bezárt szög, illetve **b** és **c** által bezárt szög is α vagy $\pi-\alpha$. Ábrázoljuk a vektorokat az egységgömbön, azaz egy rögzített egységgömb középpontjából mérjük fel őket és tekintsük a végpontjaikat. Azok a vektorok, amiknek az **a** vektorral bezárt szöge α vagy $\pi-\alpha$, egy **a** és egy $-$**a** középpontú, α sugarú körön helyezkednek el. Hasonlóan, azok a vektorok, amiknek a **b** vektorral bezárt szöge α vagy $\pi-\alpha$, egy **b** és egy $-$**b** középpontú, α sugarú körön vannak. A **c** vektor e két halmaz metszetében van (*3. ábra*).



3. ábra

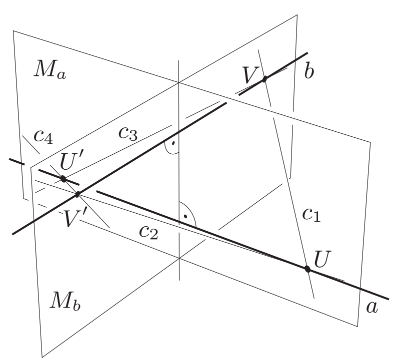
A gömbön **a** és **b** távolsága $\pi/2$, mert az a és b egyenesek merőlegesek egymásra. Ha tehát $\alpha<\pi/4$, akkor a két halmaznak nincs közös pontja, ezért nem létezik a feltételeknek megfelelő c egyenes.

Ha $\alpha=\pi/4$, akkor a két halmaznak 4 közös pontja van, továbbá az **a**, **b** és **c** vektorok egy síkba esnek. Ez azt jelenti, hogy ekkor az a, b és c egyeneseknek is egy síkba kellene esniük, ami ellentmond annak, hogy a és b kitérők. Tehát ekkor sincs a feltételeknek eleget tevő egyenes.

Végül, ha $\pi/4<\alpha<\pi/2$, akkor a két halmaznak 8 közös pontja van, az **a**, **b** és **c** vektorok pedig lineárisan függetlenek. Ilyenkor az a és b egyenesek és a **c** vektor egyértelműen meghatározzák a c egyenes helyzetét: az a egyenes és a **c** vektor egyértelműen meghatározza az a és c egyeneseket tartalmazó S_a síkot, a b egyenes és a **c** vektor pedig egyértelműen meghatározza a b és c egyeneseket tartalmazó S_b síkot. Az S_a és S_b síkok különbözőek, mert a és b kitérők, c pedig e két sík metszésvonala. Mivel az ellentétes irányú **c** irányvektorok ugyanazt a c egyenest határozzák meg, ezért ebben az esetben összesen 4, a feltételeknek megfelelő egyenes létezik.

Összefoglalva tehát $\alpha\le\pi/4$ esetén 0, $\alpha>\pi/4$ esetén pedig 4 a két egymásra merőleges kitérő egyenest metsző, mindkettővel α szöget bezáró egyeneseknek a száma.

Megjegyzés. Az, hogy a megfelelő egyenesek száma néggyel osztható, egyszerűen belátható. Ha a és b normáltranzverzálisa az n egyenes, az a és n egyeneseket tartalmazó sík M_a, a b és c egyeneseket tartalmazó sík M_b, c pedig egy a feltételeknek eleget tevő egyenes, akkor c-nek M_a-ra, illetve M_b-re vonatkozó tükörképei is jó egyenesek, mert az a és b egyenesek képei önmaguk és a tükrözés szögtartó. Ezért ha az U pont M_a-ra vonatkozó tükörképe U', a V pont M_b-re vonatkozó tükörképe pedig V' (*4. ábra*), akkor az UV, UV', $U'V$ és $U'V'$ egyenesek közül bármelyik pontosan akkor tesz eleget a feladat feltételeinek, amikor a három másik.



4. ábra