

I. megoldás. Jelölje p_n a feladatban kért valószínűséget. Az $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ események közül vagy akkor következik be páratlan sok, ha az $A_2, A_3, \dots, A_n$ események közül páros sok és azonkívül A_{n+1} is bekövetkezik, vagy ha az előbbiekből páratlan sok következik be, A_{n+1} pedig nem. Mivel az A_i események függetlenek, felírható a következő rekurzív egyenlet:

$$p_{n+1} = P(A_{n+1})(1 - p_n) + (1 - P(A_{n+1}))p_n.$$

A feladat feltétele szerint $P(A_2) = \frac{1}{8}$ és $P(A_3) = \frac{1}{18}$. Nyilván $p_2 = \frac{1}{8}$ és így

$$p_3 = \frac{1}{18} \cdot \frac{7}{8} + \frac{17}{18} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{12}.$$

Megsejthető az általános képlet: $p_n = \frac{n-1}{4n}$.

A képlet helyességét teljes indukcióval bizonyítjuk. A képlet $n = 2$ és $n = 3$ esetén helyes. Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra is igaz. Írjuk fel $n = k + 1$ -re:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= P(A_{k+1})(1 - p_k) + (1 - P(A_{k+1}))p_k = \\ &= \frac{1}{2(k+1)^2} \cdot \frac{3k+1}{4k} + \frac{2(k+1)^2 - 1}{2(k+1)^2} \cdot \frac{k-1}{4k} = \\ &= \frac{(3k+1) + (k-1)(2k^2 + 4k + 1)}{8k(k+1)^2} = \\ &= \frac{2k^3 + 2k^2}{8k(k+1)^2} = \frac{2k^2(k+1)}{8k(k+1)^2} = \frac{k}{4(k+1)}. \end{aligned}$$

Tehát a képlet fennáll $n = k + 1$ -re is, az indukciót befejeztük.

Annak a valószínűsége, hogy $A_2, A_3, \dots, A_n$ közül páratlan sok következik be, $\frac{n-1}{4n}$.

II. megoldás. Legyen p annak a valószínűsége, hogy $A_2, A_3, \dots, A_n$ közül páratlan sok következik be. Defináljuk az $X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változókat a következőképpen: legyen $X_i = -1$, ha A_i bekövetkezik, illetve $X_i = +1$, ha A_i nem következik be.

Az $X_2 X_3 \dots X_n$ szorzat értéke pontosan akkor -1 , ha $A_2, A_3, \dots, A_n$ közül páratlan sok következik be, ellenkező esetben a szorzat $+1$. A szorzat várható értéke ezért

$$(1) \quad E(X_2 X_3 \dots X_n) = p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot (+1) = 1 - 2p.$$

Független változók szorzatának várható értékét tényezőnként is kiszámíthatjuk, ezért

$$\begin{aligned} (2) \quad E(X_2 X_3 \dots X_n) &= \prod_{i=2}^n E(X_i) = \prod_{i=2}^n (P(A_i) \cdot (-1) + (1 - P(A_i)) \cdot (+1)) = \\ &= \prod_{i=2}^n (1 - 2P(A_i)) = \prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^n \frac{(i-1)(i+1)}{i^2} = \\ &= \frac{(1 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 5) \dots ((n-3)(n-1))((n-2) \cdot n)((n-1)(n+1))}{2^2 \cdot 3^2 \dots n^2} = \\ &= \frac{2n(n+1)}{2^2 \cdot n^2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

(Kisebb n esetén a középső tényezők „összeérnek”). Az (1) és (2) összevetéséből $1 - 2p = \frac{n+1}{2n}$, amiből

$$p = \frac{n-1}{4n}.$$