

Megoldás. Ha $x = 0$, akkor az első egyenletből $y = 0$. Hasonlóan, ha $y = 0$, akkor a második egyenletből $x = 0$. Tehát az $x_1 = 0, y_1 = 0$ számpár megoldása az egyenletrendszernek és a továbbiakban feltehetjük, hogy $x \neq 0, y \neq 0$. Vonjuk ki egymásból a két egyenletet.

$$\begin{aligned}x^3 - y^3 &= 5x + y - 5y - x, \\(x - y)(x^2 + xy + y^2) &= 4(x - y).\end{aligned}$$

Most két esetet kell vizsgálnunk.

Ha $x = y$, akkor az eredeti első egyenletbe helyettesítve

$$x^3 = 5x + x, \quad x^3 - 6x = 0.$$

Mivel már feltehetjük, hogy $x \neq 0$, ezért $x^2 = 6$. Ebből kapjuk az $x_2 = y_2 = \sqrt{6}$ és $x_3 = y_3 = -\sqrt{6}$ megoldásokat.

Ha $x \neq y$, akkor $x^2 + xy + y^2 = 4$. Mielőtt ennek részletes vizsgálatához kezdenénk, adjuk össze az eredeti két egyenletet.

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 6x + 6y, \\(x + y)(x^2 - xy + y^2) &= 6(x + y).\end{aligned}$$

Ha most $x = -y$, akkor a második egyenletbe helyettesítve

$$y^3 = 4y, \quad y^2 = 4,$$

hiszen az $y = 0$ esetet már korábban lezártuk. Innen adódnak az $x_4 = 2, y_4 = -2$ és $x_5 = -2, y_5 = 2$ megoldások. A továbbiakban feltehetjük, hogy $x + y \neq 0$, így az egyenlet egyszerűsíthető $(x + y)$ -nal. Az egyenletek kivonásával és összeadásával kaptunk négy megoldást és látjuk, hogy a továbbiakban a következő egyenletrendszert kell már csak megoldanunk:

$$x^2 + xy + y^2 = 4, \quad x^2 - xy + y^2 = 6.$$

A két egyenlet kivonásával kapjuk, hogy $xy = -1$. Ezt az első egyenlethez adva, majd a másodikból kivonva:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3, \quad x^2 - 2xy + y^2 = 7.$$

E két teljes négyzetből látjuk, hogy $x + y = \sqrt{3}, x + y = -\sqrt{3}, x - y = \sqrt{7}, x - y = -\sqrt{7}$. Ezek párosításából négy további elsőfokú egyenletrendszer adódik.

$$\begin{array}{llll}x + y = \sqrt{3}, & x - y = \sqrt{7} & \Rightarrow & x_6 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}, \quad y_6 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}, \\x + y = \sqrt{3}, & x - y = -\sqrt{7} & \Rightarrow & x_7 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}, \quad y_7 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}, \\x + y = -\sqrt{3}, & x - y = \sqrt{7} & \Rightarrow & x_8 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}, \quad y_8 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}, \\x + y = -\sqrt{3}, & x - y = -\sqrt{7} & \Rightarrow & x_9 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}, \quad y_9 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}.\end{array}$$

Ellenőrzés alapján látható, hogy mind a kilenc számpár valóban megoldása az egyenletrendszernek.