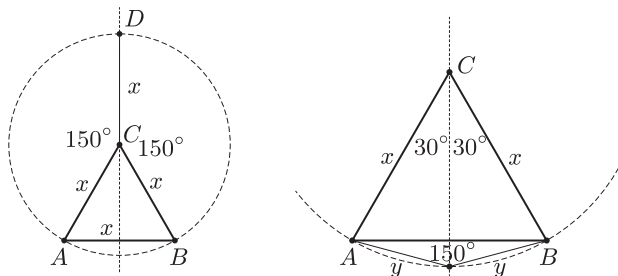


Megoldás. A pontok közötti kétféle távolságot x -szel és y -nal fogjuk jelölni, hiszen nem lesz azonnal világos, hogy melyik hosszúság a nagyobb.

Először tekintsük azokat az elrendezéseket, amelyekben a négy pont között van három olyan, amely egy ABC szabályos háromszöget határoz meg, mondjuk x oldalhosszúságút. A negyedik D pontnak az első háromtól vett távolságai között lesz két egyenlő, ami például $AD = BD$ az általánosság megszorítása nélkül. Ez azt jelenti, hogy D rajta van AB oldalfelező merőlegesén, ami a C csúcson is áthalad.

Ha itt $CD = x$, akkor D kétféle lehet, az 1. ábra szerint. A bal oldalon szereplő elrendezésben szimmetria miatt

$$\angle DCA = \angle DCB = \frac{360^\circ - 60^\circ}{2} = 150^\circ.$$



1. ábra

Mivel $AC = CD$, azért x és y egy 150° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai. A jobb oldali ábrán pedig $\angle DCA = \angle DCB = 30^\circ$ és $CA = CD = CB$, így

$$\angle CDA = \angle CDB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

és emiatt $\angle ADB = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$. Ezzel x és y ismét egy 150° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai. Tehát mindkét esetben ugyanahhoz az a/b arányhoz jutunk. Ennek kiszámításához alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos 150^\circ.$$

Itt $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ és így $\frac{a^2}{b^2} = 2 + \sqrt{3}$, $\frac{a}{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

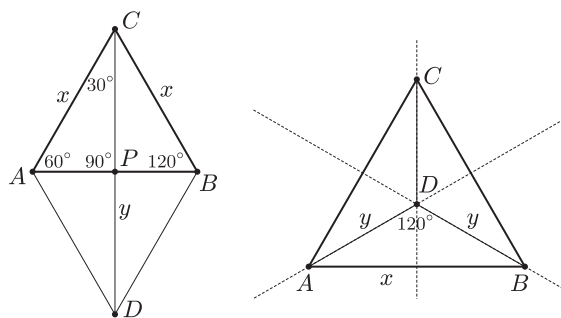
Ha $DA = DB = x$, akkor vagy $C = D$ (amit kizárhatunk), vagy pedig D a C pont tükörképe AB -re (2. ábra). Utóbbi esetben x és y egy $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ -os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai. Legyen $P = CD \cap AB$, ekkor Pitagorasz-tétellel

$$PC^2 = AC^2 - AP^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2$$

(az ábra CD -re szimmetrikus), azaz

$$y = CD = 2 \cdot PC = 2 \cdot \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \sqrt{3} \cdot x.$$

A kapott arány tehát $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.



2. ábra

Ha pedig sem DC , sem $DA = DB$ nem lesz x hosszúságú, akkor $y = DA = DB = DC$, így D az ABC kör középpontja (2. ábra). Ekkor

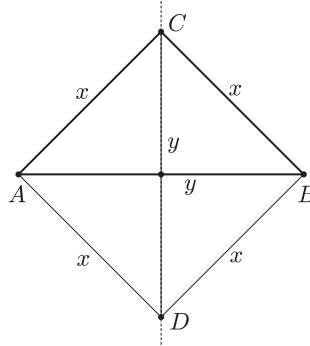
$$\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ,$$

tehát x és y az előző esethez hasonlóan egy 120° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai, a kapott arány tehát az előző esetbeli $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

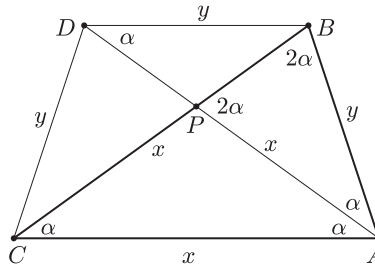
Mivel másféle elrendezésben nem szerepelhet szabályos háromszög, így a további esetekben feltételezzük, hogy szabályos háromszög nem jön létre.

Induljunk ki egy ABC egyenlő szárú háromszögből. Mivel a negyedik, D pont távolsága A -tól, B -től és C -től kétféle, így D rajta lesz az ABC háromszög egyik oldalfelező merőlegesén (3. ábra). Két esetünkben D rendre az $AB = y$ alap, illetve a $BC = x$ szár felezőmerőlegesén lesz.

Amennyiben $DA = DB$, akkor $DA = DB \neq AB = y$, mert akkor volna szabályos háromszög, vagyis $DA = DB = AC = BC = x$. Tekintve, hogy az ACD háromszög sem szabályos, $CD = y$. Tehát $ADBC$ egy egyenlő átlójú rombusz, vagyis szükségképpen négyzet. A Pitagorasz-tételt az ABC háromszögre alkalmazva $y^2 = x^2 + x^2$, ahonnan $\frac{a}{b} = \frac{y}{x} = \sqrt{2}$.



3. ábra



4. ábra

A legbonyolultabb eset, amikor $DB = DC$ (4. ábra). Mivel a DBC háromszög nem szabályos és $BC = x$, így $DB = DC = y$. A DAB háromszög sem szabályos, ezért $DA = x$. Vegyük észre, hogy az ABD és BDC háromszög oldalegyenlőség miatt egybevágó, amiből $\angle ABD = \angle BDC$. Ezt $AB = BD = DC$ -vel összevetve az adódik, hogy $ABDC$ szimmetrikus trapéz. Legyen $AD \cap BC = P$ és $\alpha = \angle BAD$. Váltószögek és egyenlő szárú háromszögek miatt

$$\alpha = \angle BAD = \angle BDA = \angle DAC = \angle ACB$$

és $\angle BAC = 2\alpha = \angle ABC$, sőt

$$\angle APB = 180^\circ - \angle APC = 2\alpha.$$

Ebből adódik, hogy $AB = AP = PC = y$. Az is kiderült, hogy az ABP és CAB háromszögek hasonlóak, amiből $\frac{AB}{PB} = \frac{CA}{AB}$. Behelyettesítve a megfelelő értékeket $\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}$, szorzással ($x > y$) $y^2 = x^2 - xy$, majd osztva $\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 1 = 0$.

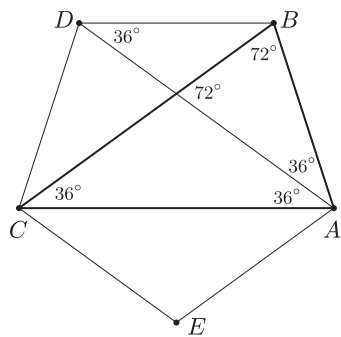
A kapott másodfokú egyenlet pozitív gyöke kell nekünk:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

lesz a megoldás.

Tehát a lehetséges a/b hányadosok: $\sqrt{2}$, $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Mindegyik eset ténylegesen létezik, és előállítja a megadott arányokat. Az utolsó esetben ez például abból látható, hogy az elrendezés a szabályos ötszög egy részeként áll elő (ld. 5. ábra).



5. ábra