

**I. megoldás.** Egy szám akkor tökéletes szám, ha egyenlő valódi osztóinak az összegével. A  $2 \cdot 3^k$  valódi osztói az  $1, 3, \dots, 3^k, 2 \cdot 3, \dots, 2 \cdot 3^{k-1}$ . Ha tökéletes számról van szó, akkor felírható a következő egyenlet:

$$1 + 3 + \dots + 3^k + 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^k.$$

Mindkét oldalhoz  $2 \cdot 3^k$ -t hozzáadva, majd felhasználva a mértani sorozat összegképletét:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + 3^k + 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot 3^k &= 4 \cdot 3^k, \\ 3(1 + 3 + \dots + 3^k) &= 4 \cdot 3^k, \\ 3 \cdot \frac{(3^{k+1} - 1)}{2} &= 4 \cdot 3^k, \\ 3^{k+2} - 3 &= 8 \cdot 3^k, \\ (9 - 8)3^k &= 3, \\ 3^k &= 3. \end{aligned}$$

Az összes átalakítás ekvivalens volt.

A  $3^x$  függvény szigorúan monoton növekvő, ezért az egyetlen megoldás a  $k = 1$ .

**II. megoldás.**  $k = 1$  esetén  $2 \cdot 3^k$  tökéletes szám, hiszen  $2 \cdot 3^1 = 6 = 1 + 2 + 3$ .

$k \geq 2$  esetén a  $3^{k-2}, 3^{k-1}, 3^k$  és  $2 \cdot 3^{k-1}$  mind egymástól és a  $2 \cdot 3^k$ -től is különböző pozitív egész számok és mind a  $2 \cdot 3^k$  osztói (mert a prímtényezős felbontásuk különböző és egyik prímtényezőjük kitevője sem nagyobb a  $2 \cdot 3^k$  megfelelő prímtényezőjének kitevőjénél).

Tehát a  $2 \cdot 3^k$  osztóinak összege legalább

$$3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k + 3^{k-2} = 3 \cdot 3^{k-1} + 3^k + 3^{k-2} = 2 \cdot 3^k + 3^{k-2}.$$

Ez biztosan nagyobb  $2 \cdot 3^k$ -nál.

Vagyis  $2 \cdot 3^k$  csak  $k = 1$  esetén tökéletes szám.

**III. megoldás.** A  $2 \cdot 3^k$  szám biztosan páros, mivel osztható kettővel, de a 2-nek magasabb kitevőjű hatványával nem. Ismert tétel (Karlik Zsuzsanna: *A tökéletes számok* című munkájában megtalálható a bizonyítással együtt), hogy egy páros  $n$  szám akkor és csak akkor tökéletes, ha  $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$  alakú, és  $(2^p - 1)$  és  $p$  egyaránt prímszámok.

Jelen esetben  $2 \cdot 3^k = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$  kell, hogy teljesüljön valamilyen  $p$  prímszámmra. Mivel  $2^p - 1$  páratlan, azért  $2 = 2^{p-1}$ , amiből  $p = 2$  következik a  $2^x$  függvény szigorú monotonitása miatt. Ebből  $2 \cdot 3^k = 2^{2-1} \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3$ , vagyis  $k = 1$  az egyetlen megoldás.

*Megjegyzés.* Voltak, akik Euler egy tételét használták, és a megoldást  $2^n(2^{n+1} - 1)$  alakban keresték. Ez utóbbi gondolatmenetre jellemző típushiba volt, hogy a megoldók nem vették figyelembe, hogy a páratlan tökéletes számok létezése nyitott kérdés, és Euler ezen tételét általánosan használták.

**IV. megoldás.** Ha  $k = 1$ , akkor a szám tökéletes:  $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$ .

Nézzük meg, mi történik, ha  $k$ -ról  $(k + 1)$ -re ugrunk: mennyivel fog változni az osztók összege és maga a szám.

$2 \cdot 3^k$  valódi osztói:  $2 \cdot 3^0, 2 \cdot 3^1, \dots, 2 \cdot 3^{k-1}; 1, 3^1, 3^2, \dots, 3^k$ .

$2 \cdot 3^{k+1}$  valódi osztói:  $2 \cdot 3^0, 2 \cdot 3^1, \dots, 2 \cdot 3^k; 1, 3^1, 3^2, \dots, 3^k, 3^{k+1}$ .

Tehát a különbségek így alakulnak:  $2 \cdot 3^{k+1} - 2 \cdot 3^k = 2 \cdot 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 3^k = 4 \cdot 3^k$  a két szám közötti különbség és  $2 \cdot 3^k + 3^{k+1} = 2 \cdot 3^k + 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 3^k$  az osztók összege közötti különbség. Ez azt jelenti, hogy  $k > 1$  esetén a valódi osztók összege nagyobb lesz, mint a szám.