Megoldás. A könnyebb megfogalmazhatóság érdekében vezessük be a $b_i = i$ jelölést ($1 \leqslant i \leqslant 2013$), amellyel a feladat úgy szól, hogy a b_1 alkalommal előforduló számok száma a_1, a b_2 alkalommal előforduló számok száma a_2 stb. Ha $a_n = 1$, akkor – mivel minden b_i különböző – van egy olyan k szám, amely a mondatban (vagyis az a_i-k és b_i-k között összesen) n-szer fordul elő, így az a_i-k között pontosan $n-1$ db k van – kivéve, ha $k = 0$, akkor pontosan n, mivel a b_i-k között nincs nulla. Ha $a_\ell = m$, ahol m pozitív egész, akkor ahhoz, hogy a mondat igaz legyen, léteznie kell m különböző számnak, amelyek mindegyike legalább $\ell - 1$-szer fordul elő az a_i-k között. Tudjuk azt is, hogy a megfelelő b_i és a_i számok szorzatainak összege pontosan 4026, hiszen a mondatban összesen ennyi szám szerepel. Bontsuk esetekre a feladatot aszerint, hogy az a_i számok között pontosan hány nulla van.

1. eset: Pontosan 2008 darab nulla van. Ekkor a_{2008} értéke legalább 1. Van ezen felül négy olyan a_i szám, amelyek értéke nem nulla, legyenek ezek a_c, a_d, a_e és a_f, értékeik p, q, r és s – ahol $p, q, r, s \geq 1$. Van tehát az a_i-k között legalább $p(c-1) + q(d-1) + r(e-1) + s(f-1)$ olyan szám, ami nem nulla. Ez legalább $1 \cdot (1-1) + 1 \cdot (2-1) + 1 \cdot (3-1) + 1 \cdot (4-1) = 6$ darab szám, mivel c, d, e, f különbözők. Ellentmondásra jutottunk, nem lehet ilyen megoldás.

2. eset: Kevesebb, mint 2008 darab nulla van. Ekkor hozzávehetünk az előbbi öt nem nulla a_j számhoz egy hatodikat – legyen ez a_g; így az öt legkisebb i közül, amire az a_i-k nem nullák, a legnagyobb legalább 5 lesz, mivel különböznek egymástól. Tehát a nem nulla a_i számok száma több, mint 1-gyel növekedett, legalább $(5-1) \cdot 1$-gyel. Ezt a gondolatmenetet követve kiderül, hogy ha egyesével csökkentjük a nullák számát, akkor a nem nulla a_i-k száma több, mint egyesével nő, azaz a feladatnak nincs ilyen megoldása sem.

3. eset: Pontosan 2013 nulla van. Ez nyilvánvalóan nem lehet, hiszen ez azt jelentené, hogy minden a_i nulla, azaz nincs olyan szám, ami $1, 2, \ldots, 2013$ alkalommal fordulna elő; ekkor a mondatban minden előforduló számnak legalább 2014-szer kellene szerepelnie. A nullára viszont ez nem teljesülne.

4. eset: Pontosan 2012 nulla van. Ekkor az egyetlen $a_i \neq 0$ érték az $a_{2012} = k \geq 1$, vagyis az összesen k-féle előforduló szám mindegyikének pontosan 2012-szer kellene szerepelnie, ezért $2012 \cdot k = 4026$, ami ellentmondás.

5. eset: Pontosan 2011 nulla van. Ekkor $1 \leq a_{2011} = k \leq 2$, és egyetlen $i \neq 2011$ indexre $a_i \neq 0$; ez nyilván az a_1, sőt $a_1 \geq 2010$. Így $4026 = 2011 \cdot k + 1 \cdot a_1$ miatt $k = 1$. Eszerint azonban az 1 éppen kétszer fordul elő, tehát $a_2 \neq 0$, ami ellentmondás.

6. eset: Pontosan 2010 nulla van. Az előbbi esethez hasonlóan $a_{2010} = 1$ és $a_1 \neq 0$. Nem létezhet további olyan a_t, $t \geq 5$ szám, ami nem 0, hiszen akkor van legalább $5-1$ olyan a_i, ami nem 0. Ha a_3 és a_4 egyike sem 0, vagy az egyik 0, a másik viszont 1-nél több, akkor legalább $2 \cdot (3-1)$ olyan a_i van, ami nem 0. Ha $a_4 = 1$, akkor $a_1 = 1$, ami nem lehet, mivel legalább 2010 olyan szám van, ami pontosan 1-szer szerepel, hiszen van 2010 db egyenlő a_i. Ha $a_3 = 1$, akkor $a_1 = u$, ahol $2013 \geq u \geq 2010$, így u éppen kétszer szerepel, tehát a_2 nem 0. Itt már csak az az eset maradt, ha a_1, a_2 és a_{2010} nem nulla, ekkor $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + a_{2010} \cdot 1 = 4026$. Tehát $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 = 2016$. Itt $a_2 = 1$ nem lehet, ekkor $a_1 = 2014$, $a_2 = 2$ esetén $a_1 = 2012$, ez nem lehet, mivel 2-es és 1-es számból is több van, mint 1. Viszont $a_2 = 3$ és $a_1 = 2010$ jó megoldás. Ekkor a 0 van 2010-szer, a 2010, az 1 és a 3 kétszer, a többi (2010 db) szám pedig egyszer.

7. eset: Pontosan 2009 nulla van. Ezúttal $a_{2009} = 1$. Az előbbi megfontolást követve a második legnagyobb a_i nem lehet 5-nél több. Pontosan öt sem lehet, mert ekkor – mivel $a_1 \geq 2009$ – az $a_i b_i$ szorzatösszeg legalább

$$1 \cdot 2009 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2009 \cdot 1$$

lesz, ami túl sok. Ha a második legnagyobb $a_i = 4$, akkor a szorzatösszeg legalább $1 \cdot 2009 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2009 \cdot 1 = 4026$ lesz, ez éppen jó, és ez a minimum csak akkor érhető el, ha $a_1 = 2009$, $a_2 = 1$, $a_4 = 1$ és $a_{2009} = 1$. Ekkor az 1 négyszer, a 2009 kétszer, a 0 2009-szer, a többi szám pedig egyszer fordul elő, ez jó megoldás. Ha a második legnagyobb a_i a 3, akkor a szorzatösszeg $a_1 = 2009$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ és $a_{2009} = 1$, illetve $a_1 = 2010$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ és $a_{2009} = 1$-gyel tehető igazzá. Ebből csak az utóbbi helyes megoldás. Ha $a_1 = 2011$, akkor $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, ami ellentmondás, mivel túl sok az 1-es. Nyilván 2011-nél több sem lehet az a_1.

Ezzel végignéztük az összes esetet, tehát az állítást háromféleképpen tehetjük igazzá.