

I. megoldás. Mivel az állításban szereplő egyenlőség jobb oldala zárt, próbáljuk a bal oldalt szintén zárt alakra hozni. Ehhez emeljünk ki az összegből 2-t, majd használjuk fel a szumma felbonthatóságát, és ismét emeljünk ki, ezúttal n -et. Ezután, mivel $i = n$ -re $n - i = 0$ – vagyis a második szumma utolsó tagja 0 – azt a tagot hagyjuk el:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n 2i \binom{2n}{n-i} &= 2 \left(\sum_{i=1}^n (n - (n-i)) \binom{2n}{n-i} \right) = \\ &= 2 \left(n \sum_{i=1}^n \binom{2n}{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \binom{2n}{n-i} \right) := A.\end{aligned}$$

Az első szumma a Pascal-háromszög $2n$ -edik sorában adja össze a tagokat a 0-t tartalmazótól az $(n-1)$ -et tartalmazóig. Ennek a sornak $2n+1$ eleme van és szimmetrikus a középső elemére (hiszen $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$), ami $\binom{2n}{n}$. Tudjuk még, hogy a Pascal-háromszög m -edik sorának a tagösszege 2^m , ezért a fenti összeg így írható:

$$\sum_{i=1}^n \binom{2n}{n-i} = \frac{\sum_{i=1}^{2n} \binom{2n}{i} - \binom{2n}{n}}{2} = \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}A &= 2 \left(n \cdot \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \binom{2n}{n-i} \right) = \\ &= 2 \left(n \cdot 2^{2n-1} - \frac{n}{2} \binom{2n}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \binom{2n}{n-i} \right) := B.\end{aligned}$$

Fordítsuk most figyelmünket a megmaradt szummában lévő kifejezésre. Ha olyan alakra tudnánk hozni, amiben szintén csak egy sor elemeit kell összegeznünk, akkor zárt alakú lenne. Alakítsuk hát át a következő, a Pascal-háromszög tagjainak explicit felírásából következő egyenlőség segítségével:

$$\begin{aligned}(n-i) \binom{2n}{n-i} &= (n-i) \cdot \frac{(2n)!}{(n-i)!(n+i)!} = 2n \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-i-1)!(n+i)!} = \\ &= 2n \binom{2n-1}{n-i-1}.\end{aligned}$$

Tehát

$$B = 2 \left(n \cdot 2^{2n-1} - \frac{n}{2} \binom{2n}{n} - 2n \sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-1}{n-i-1} \right).$$

A szummában szereplő összeg a Pascal-háromszög $(2n-1)$ -edik sorának a tagösszege a nullát tartalmazótól az $(n-2)$ -t tartalmazóig. Ebben a $2n$ elemű sorban az első n elem összege ugyanannyi, mint a második n elemé. Így a következő átalakításokat végezhetjük:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-1}{n-i-1} = \frac{\sum_{i=1}^{2n-1} \binom{2n-1}{i}}{2} - \binom{2n-1}{n-1} = \frac{2^{2n-1}}{2} - \binom{2n-1}{n-1}.$$

A bal oldal tehát, a végén felhasználva a tagok szimmetriáját, majd a Pascal-háromszög rekurzív definícióját:

$$\begin{aligned}&2 \left(n \cdot 2^{2n-1} - \frac{n}{2} \binom{2n}{n} - 2n \left(\frac{2^{2n-1}}{2} - \binom{2n-1}{n-1} \right) \right) = \\ &= 2 \left(n \cdot 2^{2n-1} - \frac{n}{2} \binom{2n}{n} - n \cdot 2^{2n-1} + 2n \binom{2n-1}{n-1} \right) = \\ &= n \cdot \left(4 \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n}{n} \right) = \\ &= n \cdot \left(2 \binom{2n-1}{n-1} + 2 \binom{2n-1}{n} - \binom{2n}{n} \right) = n \left(2 \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n} \right) = n \binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

II. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor $2 \cdot \binom{2}{0} = 2$ és $1 \cdot \binom{2}{2} = 1$, tehát igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy az állítás n -re igaz, és bizonyítsuk be $n + 1$ -re. Felhasználjuk, hogy $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2i \binom{2n+2}{n+1-i} &= \sum_{i=0}^{n+1} 2i \left(\binom{2n+1}{n+1-i} + \binom{2n+1}{n-i} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} 2i \left(\binom{2n}{n+1-i} + \binom{2n}{n-i} + \binom{2n}{n-i} + \binom{2n}{n-i-1} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \left(2i \binom{2n}{n+1-i} + 4i \binom{2n}{n-i} + 2i \binom{2n}{n-i-1} \right). \end{aligned}$$

Az első szummába $j = i - 1$ -et, a másodikba $j = i$ -t, a harmadikba $j = i + 1$ -et helyettesítve és a 0-s szorzókat tartalmazó tagokat elhagyva az összeg így is írható:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (2j+2) \binom{2n}{n-j} + \sum_{j=1}^{n+1} 4j \binom{2n}{n-j} + \sum_{j=2}^{n+2} (2j-2) \binom{2n}{n-j} &= \\ = \sum_{j=2}^n [(2j+2) + 4j + (2j-2)] \binom{2n}{n-j} + 2 \binom{2n}{n} + 4 \binom{2n}{n-1} + 4 \binom{2n}{n-1} &= \\ = \sum_{j=2}^n 8j \binom{2n}{n-j} + 8 \binom{2n}{n-1} + 2 \binom{2n}{n} = 4 \sum_{j=1}^n \left(2j \binom{2n}{n-j} \right) + 2 \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevést felhasználva ezt a következő alakra hozhatjuk:

$$\begin{aligned} &= 4n \binom{2n}{n} + 2 \binom{2n}{n} = (4n+2) \binom{2n}{n} = (n+1) \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} \binom{2n}{n} = \\ &= (n+1) \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = (n+1) \binom{2n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

III. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha n és k pozitív egészek, akkor

$$\sum_{i=n-k+1}^n 2i \cdot \binom{2n}{n-i} = k \cdot \binom{2n}{k}.$$

Ezt az általánosabb összefüggést látjuk be k -ra vonatkozó teljes indukcióval.

$k = 1$ esetén az állítás:

$$2n \cdot \binom{2n}{0} = 1 \cdot \binom{2n}{1}.$$

Mivel mindkét oldal $2n$ -nel egyenlő, az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $k = m$ esetén:

$$\sum_{i=n-m+1}^n 2i \cdot \binom{2n}{n-i} = m \cdot \binom{2n}{m}.$$

Bizonyítsuk be $k = m + 1$ -re. Ekkor az állítás:

$$\sum_{i=n-m}^n 2i \cdot \binom{2n}{n-i} = (m+1) \cdot \binom{2n}{m+1}.$$

A bal oldali összeg első tagját kiszedve a szummából:

$$2(n-m) \cdot \binom{2n}{m} + \sum_{i=n-m+1}^n 2i \cdot \binom{2n}{n-i} = (m+1) \cdot \binom{2n}{m+1}.$$

Az indukciós feltételt felhasználva:

$$\begin{aligned} 2(n-m) \cdot \binom{2n}{m} &= (m+1) \cdot \binom{2n}{m+1} - m \cdot \binom{2n}{m}, \\ (2n-m) \cdot \binom{2n}{m} &= (m+1) \cdot \binom{2n}{m+1}. \end{aligned}$$

Bontsuk ki a binominális együtthatókat:

$$(2n - m) \cdot \frac{(2n)!}{m!(2n - m)!} = \frac{(2n)!}{m!(2n - m - 1)!},$$

illetve

$$(m + 1) \cdot \frac{(2n)!}{(m + 1)!(2n - m - 1)!} = \frac{(2n)!}{m!(2n - m - 1)!}.$$

Ezzel a tételt teljes indukcióval bizonyítottuk. Ennek egy speciális esete volt a feladatban kitűzve, ahol $k = n$, amire az állítás az általános tételből triviálisan következik.

IV. megoldás. A megoldás során bizonyítandó egyenlőség bal oldalát jelölje

$$B = \sum_{i=1}^n 2i \cdot \binom{2n}{n-i},$$

a jobb oldalát pedig

$$J = n \cdot \binom{2n}{n}.$$

Tekintsünk egy véletlen bolyongást az egész számokon: Egy bolha az origóból indul és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra, ugyanilyen valószínűséggel balra ugrik 1-et, majd az előző lépéstől függetlenül, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra, ugyanilyen valószínűséggel balra ugrik 1-et, és így tovább.

Értelmezzük az X_{2n} valószínűségi változót a következőképpen: $X_{2n} :=$ a bolyongás $2n$ -edik lépésében a bolha helye. Ekkor X_{2n} lehetséges értékei a $[-2n, 2n]$ intervallum páros értékű helyei. Ha a jobbra lépések száma j , akkor a balra lépéseké $2n - j$. Ha a bolha a $2i$ -re lépett $2n$ lépés után, akkor $j - (2n - j) = 2i$, amiből $j = n + i$. Innen

$$P(X_{2n} = 2i) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n+i} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n-i},$$

ahol $i \in [-n, n]$, egész.

Legyen

$$S_{2n} = E(|X_{2n}|) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \sum_{i=-n}^n 2 \cdot |i| \cdot \binom{2n}{n-i}.$$

$S_{2n} = 2 \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot B$, hiszen $i = 0$ esetén az összegben 0 szerepel. Ha belátjuk, hogy $S_{2n} = 2 \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot J$, akkor abból valóban $J = B$ következik.

Lemma:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} \quad \text{és} \quad S_{2n+2} = S_{2n+1}.$$

A lemma bizonyítása: A második egyenlőség triviális, mert a $(2n+1)$ -edik lépés után a bolha egy páratlan, tehát 0-tól különböző helyen van, tehát $|X_{2n+2}| - |X_{2n+1}|$ értéke mindentől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel -1 , és ugyanilyen valószínűséggel $+1$. Az első egyenlőséghez egyrészt azt kell megjegyezni, hogy a várható érték számításánál az $X_{2n} = 0$ -hoz tartozó összeadandó az i -vel való szorzás miatt 0, viszont ha a bolha a $2n$ -edik lépésben a origóban volt, akkor a $(2n+1)$ -edik lépésben pontosan 1 lesz $|X_{2n+1}|$ értéke. Ez az esemény

$$P(X_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n}$$

valószínűséggel következik be.

Állítás:

$$S_{2n} = 2 \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot n \cdot \binom{2n}{n}.$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval: $n = 1$ re igaz. Feltéve az n -re vonatkozó állítást, $n + 1$ -re fogjuk igazolni.

A lemma miatt:

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} = 2 \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot n \cdot \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot (2n+1) \cdot \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot (2n+1) \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)n!n!} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot (n+1) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{n+1}{2} \binom{2n+2}{n+1} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2^{2n+2}} \cdot (n+1) \binom{2n+2}{n+1}, \end{aligned}$$

ami éppen az $n+1$ -re vonatkozó állítás.

Ezzel a teljes indukciót befejeztük. A feladat állítását beláttuk.