

Megoldás. A kifejezés minden valós x -re értelmezett, mivel

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x+x^2} + \sqrt{1-\sqrt{3}\cdot x+x^2} = \\ &= \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Legyenek a derékszögű koordináta-rendszerben az A pont koordinátái $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, a B pont koordinátái $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, továbbá a C pont koordinátái $(x; 0)$. Az A és B pontok helye rögzített, míg a C pont az x -tengely tetszőleges pontja. Ekkor

$$AC = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad BC = \sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Az tehát a kérdés, hogy az x -tengely melyik pontjára lesz az $AC + BC$ hossza minimális. Ha a C pont az AB szakasz és az x -tengely metszéspontja, akkor a két távolság összege éppen az AB szakasz hosszával egyenlő, minden más C' pontjára teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$$AC' + BC' > AB.$$

A keresett minimum az AB távolság:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \\ &= \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ezt a minimális értéket arra a pontra kapjuk, amelyben az AB egyenes metszi az x -tengelyt.

Az AB egyenes egyenlete

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot x + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} = y, \\ & y = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}. \end{aligned}$$

Az x -tengellyel a metszéspont az a pont lesz, amelynek második koordinátája 0.

$$x = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1.$$

Tehát az $\sqrt{1-x+x^2} + \sqrt{1-\sqrt{3}\cdot x+x^2}$ kifejezés minimuma $\sqrt{2}$, minimumhelye $x = \sqrt{3} - 1$.