

I. megoldás. Használjuk a szokásos jelöléseket.

Mivel egy derékszögű háromszög oldalainak hossza pozitív, alkalmazhatjuk rájuk a négyzetes és számtani közép között fennálló egyenlőtlenséget:

$$(1) \quad \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}.$$

A Pitagorasz-tételt szerint $a^2 + b^2 = c^2$. Továbbá tudjuk, hogy $a + b + c = k$, ahol k állandó. Ez utóbbiból $a + b = k - c$ következik. Helyettesítsük be ezeket az (1) egyenlőtlenségbe:

$$\sqrt{\frac{c^2}{2}} \geq \frac{k - c}{2}.$$

Mivel $c > 0$, ebből:

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \geq \frac{k - c}{2}.$$

Rendezve az egyenletet kapjuk, hogy:

$$c(\sqrt{2} + 1) \geq k, \quad \text{majd} \quad c \geq \frac{k}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)k.$$

Mivel k állandó, az átfogó legalább $(\sqrt{2} - 1)k$. Létezik is olyan háromszög, amelynek éppen ekkora az átfogója, ennek a befogóinak hossza:

$$a = b = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k.$$

Megjegyzés. Sokan az (1) egyenlőtlenség felírása után azt mondták, hogy

$$c \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b),$$

ahol egyenlőség $a = b$ esetén áll fenn, tehát egyenlő szárú háromszögre lesz a legkisebb az átfogó, és kiszámolták, hogy akkor mennyi az átfogó hossza. Ez nem teljes megoldás. Egyrészt, ha adott a terület, akkor leszűkül a szóba jövő $(a; b)$ számpárok halmaza. Másrészt közepek közti egyenlőtlenség használata esetén az egyik oldal értékét tudni szoktuk, vagyis a becslés úgy néz ki, hogy egy kifejezés legalább/legfeljebb akkora, mint egy konkrét érték. És ebben az esetben lehet azt mondani, hogy a kifejezés minimuma/maximuma ez a konkrét érték, melyet (a példabeli esetben) $a = b$ esetén vesz fel.

II. megoldás. Használjuk a szokásos jelöléseket.

Alkalmazzuk a derékszögű háromszög oldalainak négyzetére a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$(2) \quad \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}.$$

A Pitagorasz-tétel szerint $c^2 = a^2 + b^2$, ezt írjuk be a (2) egyenlőtlenségbe:

$$\frac{c^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}, \quad c^2 \geq 2ab.$$

Mindkét oldalhoz $c^2 = a^2 + b^2$ -et adva: $(a + b)^2 \leq 2c^2$, majd $a + b \leq \sqrt{2}c$ következik. Írjuk be ezt az $a + b + c = k$ egyenlőségben $a + b$ helyébe:

$$k = a + b + c \leq \sqrt{2}c + c = (1 + \sqrt{2})c,$$

amiből $c \geq \frac{k}{1 + \sqrt{2}}$ következik. Egyenlőség $a = b = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k$ esetén áll fenn.

Megjegyzés. Sokan a (2) egyenlőtlenség felírása után azt mondták, hogy $c \geq \sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{b}$, ahol egyenlőség $a = b$ esetén áll fenn, tehát egyenlő szárú háromszögre lesz a legkisebb az átfogó, és kiszámolták erre az esetre az átfogó hosszát. Ez sem teljes megoldás.

III. megoldás. A derékszögű háromszög területét felírhatjuk a következőképpen ($\alpha \in]0, \pi/2[$):

$$k = c + c \sin \alpha + c \cos \alpha = c(1 + \sin \alpha + \cos \alpha).$$

Fejezzük ki az átfogót:

$$c = \frac{k}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Adott k esetén ennek akkor van minimuma, amikor a nevezőnek és egyben $(\sin \alpha + \cos \alpha)$ -nak maximuma.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha + \pi/4).$$

Ez pedig az adott intervallumon $\alpha = \pi/4$ esetén veszi fel a legnagyobb értékét. Így a $c = \frac{k}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}$ a legkisebb értékét $\alpha = \pi/4$ (vagyis egyenlő szárú háromszög) esetén veszi fel, és a felvett minimum

$$c = \frac{k}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{k}{1 + \sqrt{2}}.$$

IV. megoldás. Minimum és maximumérték sokszor szokott lenni egyenlő szárú háromszög esetén, nézzük meg ezt most is. Legyen a száraz hossza a (így nyilván $a > 0$), ekkor az átfogó $\sqrt{2}a$, a terület pedig: $k = (2 + \sqrt{2})a$.

Növeljük az egyik befogót x -szel, a másikat pedig csökkentsük y -nal ($x, y > 0$), és nézzük meg, változatlan terület mellett hogyan változik az átfogó.

Ha a két befogó $a - x$, illetve $a + y$, akkor k terület mellett az átfogó

$$(2 + \sqrt{2})a - (a - x) - (a + y) = \sqrt{2}a + x - y.$$

Azt szeretnénk belátni, hogy $x > y$, hiszen ekkor az átfogó nagyobb, mint az egyenlő szárú háromszög esetén.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt, majd rendezzük a kapott egyenletet:

$$\begin{aligned} (a - x)^2 + (a + y)^2 &= (\sqrt{2}a + x - y)^2, \\ a^2 - 2ax + x^2 + a^2 + 2ay + y^2 &= 2a^2 + x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}ax - 2\sqrt{2}ay - 2xy, \\ -2ax + 2ay &= 2\sqrt{2}ax - 2\sqrt{2}ay - 2xy, \\ 0 &= ax(2 + 2\sqrt{2}) - ay(2 + 2\sqrt{2}) - 2xy, \\ 0 &= a(2 + 2\sqrt{2})(x - y) - 2xy. \end{aligned}$$

Mivel a, x és y pozitívak, a jobb oldal csak úgy lehet 0, ha $x - y > 0$, vagyis $x > y$.

Ezzel beláttuk, hogy egyenlő szárú háromszög esetén a legkisebb az átfogó.

Ha az átfogó c , akkor a befogó $c/\sqrt{2}$, a terület pedig:

$$k = c(1 + 2/\sqrt{2}) = c(1 + \sqrt{2}), \text{ ahonnan}$$

$$c = \frac{k}{\sqrt{2} + 1}.$$

V. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy adott átfogó mellett mekkora lehet legfeljebb a két befogó összege. Vagyis adott c esetén keressük $a + b$ maximumát, jelölje ezt p . Ekkor k maximuma $p + c$, mely adott $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ szögű háromszög esetén lép fel. A kérdést megfordítva: Ha rögzített a terület, akkor az átfogója a minimális értékét az $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1$ szögek esetén veszi fel.

A Pitagorasz-tétel miatt $a^2 + b^2 = c^2$. Mivel c adott, így c^2 és $a^2 + b^2$ is az.

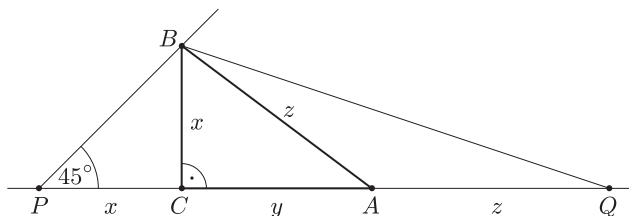
$a + b$ akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a négyzete is az: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Ebből $a^2 + b^2$ adott, tehát $(a + b)^2$ és így $a + b$ akkor lesz a legnagyobb, amikor $2ab$, és egyben ab felveszi a maximumát.

A Thalész-tétel megfordítása miatt a háromszögnek az átfogóval szemközi csúcsa az átfogó Thalész-körén helyezkedhet el. Legyen a c átfogóhoz tartozó magasságvonal m . Ekkor a háromszög területe $\frac{ab}{2} = \frac{cm}{2}$, vagyis $ab = cm$. Mivel c adott, ezért ez akkor lesz a legnagyobb, amikor m a lehető legnagyobb, ez pedig akkor következik be, amikor m egyben a c oldal felező merőlegese is, vagyis amikor a háromszög egyenlő szárú.

Egyenlő szárú háromszög esetén pedig a terület $(2 + \sqrt{2})a$, az átfogó $\sqrt{2}a$, ami a területnek az $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ -szerese.

Megjegyzés. Hasonló gondolatmenetet alkalmazott Bauer Márton (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 9. évf.): A harmadik csúcs az átfogó két végpontja, mint fókusz köré szerkesztett ellipszisen helyezkedik el. A lehető legnagyobb ellipszis, aminek vannak közös pontjai a körrel, az amelyik a kört két ponton érinti. Ezek a pontok az átfogóhoz írható egyenlő szárú derékszögű háromszög csúcsai.

VI. megoldás. Legyen ABC derékszögű háromszög, és a területét, k -t mérjük fel AC egyenesére az 1. ábrának megfelelően.



1. ábra

Mivel PCB egyenlő szárú derékszögű háromszög, $CPB \sphericalangle = 45^\circ$. Emiatt a B csúcs a PQ -val 45° -os szöget bezáró félegyenesen helyezkedik el A -tól z távolságra, tehát a B pont az A pont körül z sugárral húzott kör és a félegyenes közös pontja. Ezért AB legalább akkora, mint az A pont és a PB félegyenes távolsága. Így

$$AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2}AP = \frac{\sqrt{2}}{2}(k - AQ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(k - AB),$$

vagyis

$$AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(k - AB),$$

amiből rendezéssel $2AB \geq \sqrt{2}k - \sqrt{2}AB$, majd $AB(2 + \sqrt{2}) \geq \sqrt{2}k$, végül

$$AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}k = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}k = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2}k = (\sqrt{2} - 1)k.$$

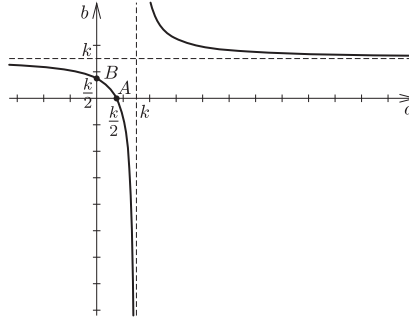
Ebből következik, hogy AB legkisebb értéke $(\sqrt{2} - 1)k$, ami akkor következik be, amikor az A középpontú, z sugárú kör érinti a PB félegyeneset. Ekkor $PBA \sphericalangle = 90^\circ$, és így $PAB \sphericalangle = 45^\circ$, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú.

VII. megoldás. Az első megoldás megjegyzésében említettük, hogy a feladatban leszűkül az a tartomány, amelyre a közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk. Vizsgáljuk ezt meg jobban. Adott a k állandó, és $k = a + b + c$. Ebből

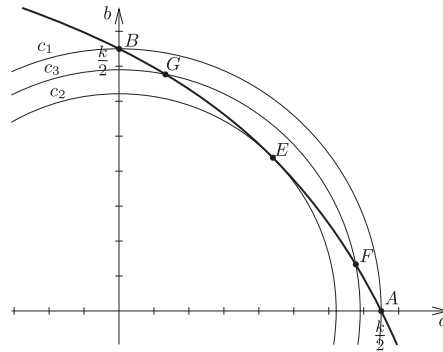
$$\begin{aligned} k^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 2(c^2 + ab + ac + bc) = \\ &= 2(a + c)(b + c) = 2(k - b)(k - a), \end{aligned}$$

amiből $(a - k)(b - k) = \frac{k^2}{2}$.

Ezt ábrázolva látható, hogy azok az $(a; b)$ számpárok lesznek egy k területű háromszög befogói, amelyek a megfelelő hiperbola-ív $A(\frac{k}{2}; 0)$ és $B(0; \frac{k}{2})$ pontjai közé esnek (2. ábra).



2. ábra



3. ábra

Mivel a Pitagorasz tétel szerint $a^2 + b^2 = c^2$, így egy O középpontú, c sugarú kör és a hiperbola-ív metszéspontjainak koordinátái egy megfelelő $(k$ területű) háromszög befogóinak hosszát adják (3. ábra).

A c értéke kisebb, mint a c_1 kör sugara, vagyis $\frac{k}{2}$, és legalább akkora, mint a c_2 kör sugara. (A c_3 kör egy „köztes” kört mutat, ahol F és G két megfelelő háromszög koordinátáit adják.) A c_2 kör az E pontban érinti a hiperbola-ívet, a szimmetria miatt két koordinátája egyenlő. Tehát c értéke egyenlő szárú háromszög esetén lesz minimális, kiszámolható (lásd pl. a IV. megoldást), hogy ekkor $c = (\sqrt{2} - 1)k$.