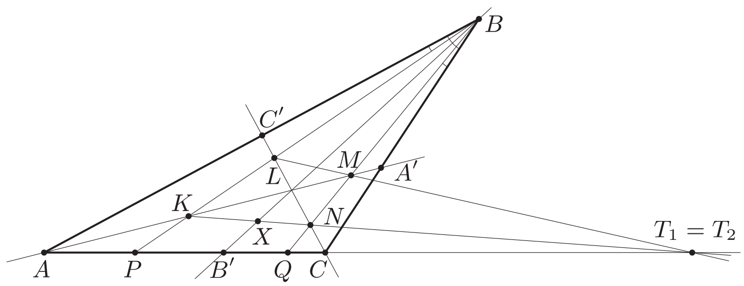
I. megoldás. Legyenek a háromszög szögfelezőinek a szemközti oldalszakaszokkal vett metszéspontja A', B', C', a KN és BB' egyenes metszéspontja X. A megoldásunk során nem előjeles szakaszokkal dolgozunk.

A szögekre vonatkozó feltételből következik, hogy az AC egyenesen a pontok sorrendje A, P, B', Q, C (hiszen $ABP\sphericalangle < ABB'\sphericalangle$, valamint $CBQ\sphericalangle < CBB'\sphericalangle$), valamint az, hogy a BB' nemcsak az $ABC\sphericalangle$, hanem a $PBQ\sphericalangle$ szögfelezője is, hiszen

$$PBB'\sphericalangle = ABB'\sphericalangle - ABP\sphericalangle = B'BC\sphericalangle - QBC\sphericalangle = B'BQ\sphericalangle.$$



Mivel AA', BB', CC' szögfelezők, egy pontban metszik egymást, tehát a KM, BX és NL egyenesek is egy pontban metszik egymást, hiszen azonosak az előbb felsorolt egyenesekkel. Így a BKN háromszögre felírható a Ceva-tétel:

$$\frac{KL}{LB} \cdot \frac{BM}{MN} \cdot \frac{NX}{XK} = 1.$$

Messe az LM és KN egyenes az AC oldalegyenesét a T_1, illetve a T_2 pontban. A Menelaosz-tétel szerint a BPQ háromszögre és a BP és BQ oldalakat metsző LM egyenesre:

$$\frac{PL}{LB} \cdot \frac{BM}{MQ} \cdot \frac{QT_1}{T_1P} = 1,$$

a BPQ háromszögre és a BP és BQ oldalakat metsző KN egyenesre:

$$\frac{PK}{KB} \cdot \frac{BN}{NQ} \cdot \frac{QT_2}{T_2P} = 1.$$

Megmutatjuk, hogy $\dfrac{QT_1}{T_1P} = \dfrac{QT_2}{T_2P}$. Mivel

$$\frac{PL}{LB} \cdot \frac{BM}{MQ} \cdot \frac{QT_1}{T_1P} = \frac{PK}{KB} \cdot \frac{BN}{NQ} \cdot \frac{QT_2}{T_2P},$$

a bizonyítandó állítással ekvivalens a következő:

$$\frac{PL}{LB} \cdot \frac{BM}{MQ} = \frac{PK}{KB} \cdot \frac{BN}{NQ}.$$

Mivel a CC' az ACB szög felezője, a $PCB\sphericalangle$ szögfelezője is, tehát CL szögfelezője a PCB szögnek. Hasonlóan adódik, hogy AM a $QAB\sphericalangle$ szögfelezője, AK a $PAB\sphericalangle$ szögfelezője, CN pedig a $QCB\sphericalangle$ szögfelezője, azaz

$$\begin{aligned}
&\text{a } QAB \text{ háromszögre:} && \frac{QM}{MB} = \frac{QA}{AB},\\
&\text{a } PAB \text{ háromszögre:} && \frac{PK}{KB} = \frac{PA}{AB},\\
&\text{a } PCB \text{ háromszögre:} && \frac{PL}{LB} = \frac{PC}{CB},\\
&\text{a } QCB \text{ háromszögre:} && \frac{QN}{NB} = \frac{QC}{CB}.
\end{aligned}$$

Tehát a bizonyítandó $\dfrac{PL}{LB} \cdot \dfrac{BM}{MQ} = \dfrac{PK}{KB} \cdot \dfrac{BN}{NQ}$ állítás ekvivalens ezzel:

$$\frac{PC}{CB} \cdot \frac{AB}{QA} = \frac{PA}{AB} \cdot \frac{CB}{QC},$$

átrendezve:

$$\frac{AB}{CB} \cdot \frac{AB}{CB} = \frac{PA}{QC} \cdot \frac{QA}{PC}.$$

A szinusztételt felhasználva:

$$\frac{AB}{AP} \cdot \frac{QC}{BC} = \frac{\sin APB\sphericalangle \sin QBC\sphericalangle}{\sin ABP\sphericalangle \sin BQC\sphericalangle} = \frac{\sin APB\sphericalangle}{\sin BQC\sphericalangle},$$

hiszen $ABP\sphericalangle = QBC\sphericalangle$.

Hasonlóan:

$$\frac{BC}{CP} \cdot \frac{AQ}{AB} = \frac{\sin BPC\sphericalangle \sin ABQ\sphericalangle}{\sin PBC\sphericalangle \sin AQB\sphericalangle} = \frac{\sin BPC\sphericalangle}{\sin AQB\sphericalangle},$$

hiszen $PBC\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABP\sphericalangle = ABC\measuredangle\sphericalangle - QBC\sphericalangle = ABQ\sphericalangle$.

Mivel $APB\sphericalangle = 180^\circ - BPC\sphericalangle$ és $BQC\sphericalangle = 180^\circ - AQB\sphericalangle$, így

$$\frac{AB}{AP} \cdot \frac{QC}{BC} = \frac{\sin APB\sphericalangle}{\sin BQC\sphericalangle} = \frac{\sin BPC\sphericalangle}{\sin AQB\sphericalangle} = \frac{BC}{CP} \cdot \frac{AQ}{AB}, \quad \text{azaz} \quad \frac{AB}{CB} \cdot \frac{AB}{CB} = \frac{PA}{QC} \cdot \frac{QA}{PC}.$$

Ezt kellett belátnunk. Így $\dfrac{QT_1}{T_1P} = \dfrac{QT_2}{T_2P}$.

A T_1 pont nyilván nem lehet a PQ szakasz belső pontja. Ha $\dfrac{QT_1}{T_1P} > 1$, akkor $QT_1 > T_1P$, tehát T_1 a PQ egyenes P-t nem tartalmazó félegyenesének eleme. Ha $\dfrac{QT_1}{T_1P} < 1$, akkor $QT_1 < T_1P$, tehát T_1 a PQ egyenes Q-t nem tartalmazó félegyenesének eleme. Ha $\dfrac{QT_1}{T_1P} = 1$ lenne, akkor $ABP\sphericalangle = \dfrac{1}{2}ABC\sphericalangle$, ami nem megengedett.

Legyen adott T_1. Ha $T_1 = T_2$, akkor nyilván teljesül, hogy $\dfrac{QT_1}{T_1P} = \dfrac{QT_2}{T_2P}$. Más T_1 pontra pedig ez nem teljesül, hiszen T_2 ugyanazon a félegyenesen van, mint T_1 (tehát vagy a P-t vagy a Q-t nem tartalmazó PQ félegyenesen). Ekkor a P, Q, T_1 pontok sorrendje adott, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy T_1 a PQ félegyenes P-t nem tartalmazó félegyenesén van, tehát $T_2P > QT_2$. Ha T_2-t P-től (és egyben Q-tól) távolítjuk k-val, akkor

$$\frac{QT_2 + k}{T_2P + k} = 1 + \frac{QT_2 + k - T_2P - k}{T_2P + k} < 1 + \frac{QT_2 - T_2P}{T_2P} = \frac{QT_2}{T_2P},$$

tehát az arány csökken.

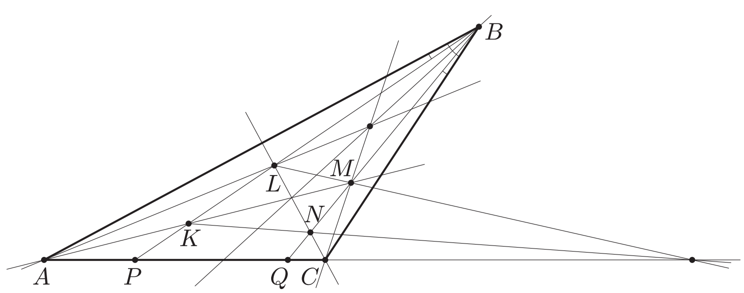
Hasonlóan látható, hogy ha közelítjük, akkor az arány nő, azaz

$$\frac{QT_2 - k}{T_2P - k} = 1 + \frac{QT_2 - k - T_2P + k}{T_2P - k} > 1 + \frac{QT_2 - T_2P}{T_2P} = \frac{QT_2}{T_2P},$$

tehát adott T_1-hez csak egy megfelelő T_2 van. Ehhez hasonlóan belátható az is, ha a T_1 (és egyben a T_2) a PQ egyenes Q-t nem tartalmazó félegyenesén van, akkor is csak egy T_2 van adott T_1-hez.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Azt fogjuk belátni, hogy az AL és CM egyenesek a B-ből induló szögfelezőn metszik egymást, ugyanis ez ekvivalens az eredeti állítással. Ha ugyanis ez valóban teljesül, akkor az AKL és CNM háromszögek egyenesre nézve perspektívek, tehát ekkor pontra nézve is perspektívek, vagyis az AC, KN, ML egyenesek is egy ponton mennek át (Desargues-tétel).



AK, CN és BE szögfelezők. Írjunk fel a trigonometrikus Ceva-tételeket szögekre.

A BL, AL és CL egyenesek egy ponton mennek át, tehát

(1) $$\frac{\sin ABL\sphericalangle \cdot \sin BCL\sphericalangle \cdot \sin CAL\sphericalangle}{\sin BAL\sphericalangle \cdot \sin LCA\sphericalangle \cdot \sin LBC\sphericalangle} = 1.$$

A CM, AM és BM egyenesek is egy ponton mennek át, tehát

(2) $$\frac{\sin ABM\sphericalangle \cdot \sin BCM\sphericalangle \cdot \sin CAM\sphericalangle}{\sin BAM\sphericalangle \cdot \sin CBM\sphericalangle \cdot \sin ACM\sphericalangle} = 1.$$

Azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{\sin CAL\sphericalangle \cdot \sin ABE\sphericalangle \cdot \sin BCM\sphericalangle}{\sin EBC\sphericalangle \cdot \sin BAL\sphericalangle \cdot \sin ACM\sphericalangle} = 1. \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy $ABE\sphericalangle = ECB\sphericalangle$, mivel BE szögfelező, tehát szinuszuk is egyenlő, így (3)-ból a bizonyítandó állítás:

$$\frac{\sin CAL\sphericalangle \cdot \sin BCM\sphericalangle}{\sin BAL\sphericalangle \cdot \sin ACM\sphericalangle} = 1. \tag{4}$$

Mivel CL szögfelező, $BCL\sphericalangle = LCA\sphericalangle$, emiatt (1)-ből

$$\frac{\sin ABL\sphericalangle \cdot \sin CAL\sphericalangle}{\sin BAL\sphericalangle \cdot \sin LBC\sphericalangle} = 1. \tag{5}$$

Mivel AM szögfelező, $BAM\sphericalangle = CAM\sphericalangle$, emiatt (2)-ből

$$\frac{\sin ABM\sphericalangle \cdot \sin BCM\sphericalangle}{\sin CBM\sphericalangle \cdot \sin ACM\sphericalangle} = 1. \tag{6}$$

Tudjuk továbbá azt is, hogy $ABL\sphericalangle = CBM\sphericalangle$ és $ABM\sphericalangle = CBL\sphericalangle$, tehát ezek szinusza is egyenlő.

Az (5) és (6) egyenleteket összeszorozzuk, ekkor megkapjuk (4)-et:

$$\begin{aligned} \frac{\sin ABL\sphericalangle \cdot \sin CAL\sphericalangle}{\sin BAL\sphericalangle \cdot \sin LBC\sphericalangle} \cdot \frac{\sin ABM\sphericalangle \cdot \sin BCM\sphericalangle}{\sin CBM\sphericalangle \cdot \sin ACM\sphericalangle} &= 1, \\ \frac{\sin CAL\sphericalangle}{\sin BAL\sphericalangle} \cdot \frac{\sin BCM\sphericalangle}{\sin ACM\sphericalangle} &= 1. \end{aligned}$$

Tehát teljesül a feladat állítása.

Megjegyzés. A feladat projektív geometriai eszközökkel is megoldható. Ha a beírt kör középpontja I, és a BA, BP, BI, BQ, BC egyeneseket rendre a, p, i, q, c-vel jelöljük, akkor

$$(I, A, K, M) = (i, a, p, q) = (i, c, q, p) = (I, C, N, L)$$

(ahol a zárójelek a megfelelő kettősviszonyokat jelölik). Az I, A, K, M és az I, C, N, L pontnégyesek tehát perspektívek, és ezért az AC, KN és ML egyenesek egy ponton mennek át.