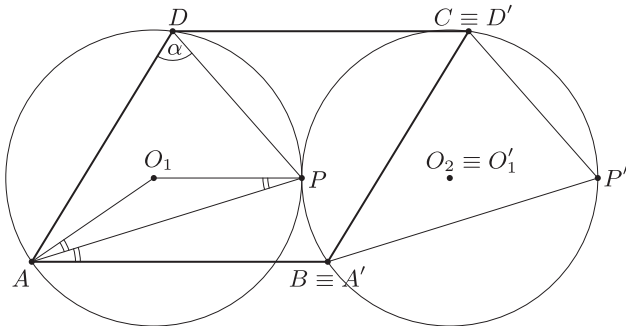


Megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Legyen O_1 az APD , O_2 pedig a BCP háromszög köré írt kör középpontja. Toljuk el az APD háromszöget az $\overline{AB}$ vektorral. Ekkor A képe B , D képe C , a P és az O_1 pontok képét pedig jelölje P' , illetve O'_1 . Az eltolás miatt $APD \triangleleft = BP'C \triangleleft$, ezért az $APD \triangleleft + BPC \triangleleft = 180^\circ$ feltételből következik, hogy $BP'CP$ húrnégyszög. Tehát a BCP és BCP' háromszögek köré írt körök egybeesnek, azaz $O'_1 \equiv O_2$, vagyis $O_1O_2 = \overline{AB}$.

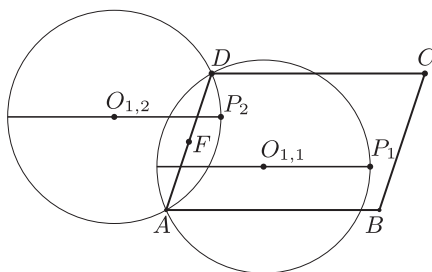


1. ábra

Legyen $PDA \sphericalangle = \alpha$. Ekkor a $PAB \sphericalangle + PDA \sphericalangle = 90^\circ$ feltételből következik, hogy $\alpha < 90^\circ$ és $PAB \sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Mivel egy középponti szög kétszerese az ugyanahhoz a húrhoz tartozó kerületi szögnek, azért $AO_1P \sphericalangle = 2\alpha$, s így az $AP O_1$ egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei $AP O_1 \sphericalangle = PAO_1 \sphericalangle = 90^\circ - \alpha = PAB \sphericalangle$ (1. ábra). Mivel P a paralelogramma belső pontja, ez azt jelenti, hogy $AP O_1 \sphericalangle$ és $PAB \sphericalangle$ váltószögek, tehát O_1P párhuzamos AB -vel. Azonban O_1O_2 is párhuzamos AB -vel és $O_1P = O_2P$ (mert az O_i pontok a P -n átmenő körök középpontjai), ezért P az O_1O_2 szakasz felezőpontja. Ebből az is következik, hogy

$$O_1A = O_1P = \frac{O_1O_2}{2} = \frac{AB}{2}.$$

Ennek alapján a szerkesztést már könnyen elvégezhetjük. Először megszerkesztünk egy olyan kört, amely áthalad az A és D pontokon, sugara pedig fele az AB szakasz hosszának. Ennek középpontja lesz O_1 . Az $AB > BC$ feltételből következik, hogy pontosan két ilyen kör létezik, és azok az AD szakasz F felezőpontjára szimmetrikusan helyezkednek el (2. ábra). Ezután megszerkesztjük a körnek AB -vel párhuzamos átmérőjét, ami nek a paralelogramma belsejébe eső végpontja lesz a keresett P pont. A fentiekből világos, hogy az így kapott pont valóban megoldása is a feladatnak.



2. ábra

A feladatnak tehát akkor van megoldása, mégpedig pontosan kettő, ha a szóban forgó átmérő az AB és CD egyenesek közé esik, azaz ha $DAB_{\triangleleft} \leq 90^\circ$, akkor $FAO_{1\triangleleft} < DAB_{\triangleleft}$, ha pedig $DAB_{\triangleleft} > 90^\circ$, akkor $FAO_{1\triangleleft} < 180^\circ - DAB_{\triangleleft}$ teljesül. Ez mindkét esetben ekvivalens azzal, hogy fennáll a $\cos FAO_{1\triangleleft} > |\cos DAB_{\triangleleft}|$ egyenlőtlenség, azaz

$$|\cos DAB\triangle| < \frac{FA}{AO_1} = \frac{DA}{AB},$$

vagyis teljesül az $AD > AB \cdot |\cos DAB|$ egyenlőtlenség.