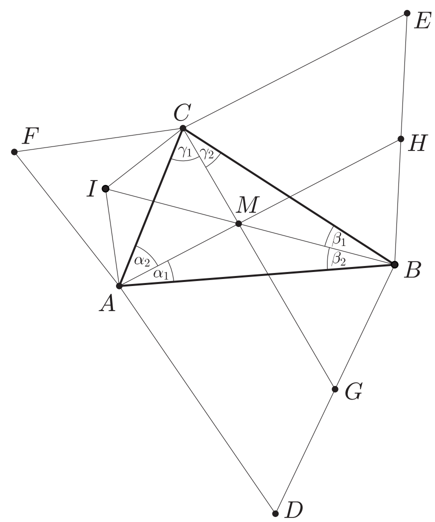
Megoldás. Legyen $\alpha_1 = HAB\sphericalangle$, $\alpha_2 = CAH\sphericalangle$, $\beta_1 = CBI\sphericalangle$, $\beta_2 = IBA\sphericalangle$, $\gamma_1 = GCA\sphericalangle$, $\gamma_2 = BCG\sphericalangle$. Alkalmazzuk a szinusztételt az ABH és ACH háromszögekre. Ekkor

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin(\beta+60^\circ)\frac{BH}{AH}}{\sin(\gamma+30^\circ)\frac{CH}{AH}} = \\ = \frac{\sin(\beta+60^\circ)}{\sin(\gamma+30^\circ)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Felhasználtuk, hogy CH magasságvonal a szabályos háromszögben.



Hasonlóan adódik CAG és CBG háromszögekre alkalmazva a szinusztételt, hogy

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin(\alpha+30^\circ)\frac{AG}{CG}}{\sin(\beta+60^\circ)\frac{BG}{CG}} = \frac{\sin(\alpha+30^\circ)}{\sin(\beta+60^\circ)} \cdot \sqrt{3}.$$

Végül alkalmazzuk a szinusztételt a BIC és BAI háromszögekre. Itt felhasználjuk, hogy szabályos háromszögben a középpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok szögfelezőkre esnek és egyenlő hosszúak.

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\sin(\gamma+30^\circ)\frac{CI}{BI}}{\sin(\alpha+30^\circ)\frac{AI}{BI}} = \frac{\sin(\gamma+30^\circ)}{\sin(\alpha+30^\circ)}.$$

Összeszorozva a fentieket,

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1$$

adódik, amely a trigonometrikus Ceva-tétel alapján éppen a bizonyítandóval ekvivalens.

Megjegyzés: Koordináta-geometriai megoldás során vizsgálni kell az egyenesek függőleges helyzetének esetét, ellenkező esetben a dolgozat hiányos.