**Megoldás.** Ennek az egyenletnek nem lehet $x \geq \sqrt[3]{92}$ megoldása, mivel akkor mindkét szorzat nemnegatív, és legalább az egyik pozitív. Az is könnyen látható, hogy $\sqrt[3]{x+11} \neq 0$ és $x^3 - 92 \neq 0$, ezért ezekkel oszthatunk:

$$\frac{11x^3+80}{92-x^3} = \frac{\sqrt[3]{92x-80}}{\sqrt[3]{x+11}}.$$

Legyen

$$y = \frac{\sqrt[3]{92x-80}}{\sqrt[3]{x+11}}, \quad \text{ekkor} \quad y^3 = \frac{92x-80}{x+11}, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{11y^3+80}{92-y^3}.$$

Tehát a

$$g\colon x \mapsto \frac{\sqrt[3]{92x-80}}{\sqrt[3]{x+11}}$$

függvény inverze az

$$f\colon x \mapsto \frac{11x^3+80}{92-x^3}$$

függvénynek. Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton nő a $\big(-\infty, \sqrt[3]{92}\big)$ intervallumon, hiszen ott a számláló szigorúan monoton nő, a nevező pedig pozitív és szigorúan monoton fogy. Az is egyszerűen belátható, hogy a $\big(-\infty, \sqrt[3]{92}\big)$-n értelmezett $f$ értékkészlete a valós számok halmaza. Ebből következik, hogy a teljes valós számhalmazon értelmezett és ott szigorúan monoton növő $g$ függvénynek pedig $\big(-\infty, \sqrt[3]{92}\big)$ az értékkészlete. Ha $a$ az egyenletünk megoldása, azaz $f(a) = g(a) = b$ teljesül valamilyen $b$-re, akkor $a < b$ esetén $b = f(a) < f(b) = f\big(g(a)\big) = a$ következne, $a > b$ esetén pedig $b = f(a) > f(b) = f\big(g(a)\big) = a$; mindkettő ellentmondás. Az egyenletnek ezért $a$ pontosan akkor megoldása, ha $f(a) = a$[1], azaz

$$\frac{11a^3+80}{92-a^3} = a,$$
$$a^4 + 11a^3 - 92a + 80 = 0.$$

A bal oldalt szorzattá alakíthatjuk:

$$\big(a^2 - 3a + 2\big)\big(a^2 + 14a + 40\big) = 0,$$

tehát az egyenlet megoldásai $-10$, $-4$, 1 és 2.

[1]Ld. Ábrahám Gábor: *Az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelőssége és egyéb érdekességek,* KöMaL (2010/9), 514–527. o.