

I. megoldás. Jelölje a és $a + 1$ azt a két gyököt, amelyek különbsége 1, ekkor

$$a^3 - 7a + p = 0 \quad \text{és} \quad (a + 1)^3 - 7a - 7 + p = 0.$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet. A következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 3a^2 + 3a - 6 &= 0, \\ a^2 + a - 2 &= 0, \\ a_1 &= 1, \quad a_2 = -2. \end{aligned}$$

Mivel tudjuk a -t, ezért innen már ki tudjuk számolni p -t is:

$$\begin{aligned} 1. \text{ eset:} \quad & 1 - 7 + p = 0, & p &= 6. \\ 2. \text{ eset:} \quad & -8 + 14 + p = 0, & p &= -6. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy p mindkét értéke valóban megoldása a feladatnak.

II. megoldás. Ha a és $a + 1$ valós gyökök, akkor $(x - a)(x - a - 1)$ kiemelhető az $x^3 - 7x + p$ polinomból:

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + p &= (x - a)(x - a - 1)(x - b) = \\ &= x^3 - (2a + b + 1)x^2 + (a^2 + 2ab + a + b)x - (a^2b + ab). \end{aligned}$$

Az x -hatványok együtthatóinak összevetéséből kapjuk, hogy

$$2a + b + 1 = 0, \quad a^2 + 2ab + a + b = -7, \quad -(a^2b + ab) = -(a^2 + a) \cdot b = p.$$

Az első egyenletből kifejezzük b -t és beírjuk a második egyenletbe:

$$a^2 - 4a^2 - 2a + a - 2a - 1 = -7,$$

innen $-3a^2 - 3a = -6$, $a \cdot (a + 1) = 2$, ami másodfokú egyenlet a -ra, megoldásai $a_1 = 1$ és $a_2 = -2$. Ezeket visszaírva az egyik ágon

$$b_1 = -2a_1 - 1 = -3 \quad \text{és} \quad p_1 = -(a^2 + a) \cdot b = 6.$$

Ekkor az egyenlet gyökei 1, 2, -3. A másik ágon

$$b_2 = -2a_2 - 1 = 3, \quad p_2 = -2 \cdot 3 = -6.$$

Ekkor az egyenlet gyökei -2, -1, 3. Tehát p megfelelő értékei -6 és 6.