

I. megoldás. Azt kell igazolnunk, hogy

$$S = \frac{z^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{y^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2.$$

Az $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ azonosságot, valamint a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget felhasználva

$$\begin{aligned} S &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{z^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{x^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} \cdot \frac{y^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2}} = \\ &= 3 \sqrt[3]{(x + y)(y + z)(z + x)} \sqrt[3]{\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{y^2 - yz + z^2}{y^2 + yz + z^2} \cdot \frac{z^2 - zx + x^2}{z^2 + zx + x^2}}. \end{aligned}$$

Tetszőleges a, b valós számokra $0 \leq \frac{2(a - b)^2}{3(a^2 - ab + b^2)}$ miatt fennáll az $a^2 + ab + b^2 \leq 3(a^2 - ab + b^2)$ egyenlőtlenség. Ha belátjuk, hogy $\sqrt[3]{(x + y)(y + z)(z + x)} \geq 2$ is igaz, akkor ezeket felhasználva a kívánt $S \geq 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = 2$ egyenlőtlenséget kapjuk.

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget és az $xyz = 1$ feltételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{x + y}{2} \cdot \frac{y + z}{2} \cdot \frac{z + x}{2} \geq \sqrt{xy} \sqrt{yz} \sqrt{zx} = xyz = 1.$$

Ezért $\sqrt[3]{(x + y)(y + z)(z + x)} \geq 2$ valóban teljesül, és így a fentiek szerint a bizonyítandó $S \geq 2$ egyenlőtlenség is. A megoldásból az is látszik, hogy egyenlőség pontosan az $x = y = z = 1$ esetben áll fenn.

II. megoldás. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a $z^3 + y^3, x^3 + z^3, y^3 + x^3$ és az $y^2 + yz + z^2, z^2 + zx + x^2, x^2 + xy + y^2$ számhármassok azonosan rendezettek. Így a rendezési tétel szerint

$$\begin{aligned} S &= \frac{z^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{y^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq \\ &\geq \frac{z^3 + y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{x^3 + z^3}{z^2 + zx + x^2} + \frac{y^3 + x^3}{x^2 + xy + y^2}. \end{aligned}$$

Az I. megoldásban igazolt $a^2 + ab + b^2 \leq 3(a^2 - ab + b^2)$ összefüggést felhasználva megmutatjuk, hogy az ily módon kapott összeg $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2}$ alakú tagjai (ahol a, b pozitív számok) alulról becsülhetők $\frac{a + b}{3}$ -mal:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} = (a + b) \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a + b}{3}.$$

Ezt a becslést, továbbá a számtani és mértani közép közötti összefüggést alkalmazva a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$S \geq \frac{z + y}{3} + \frac{x + z}{3} + \frac{y + x}{3} = 2 \cdot \frac{x + y + z}{3} \geq 2 \cdot \sqrt[3]{xyz} = 2.$$