

Megoldás. Vizsgáljuk meg először algebrailag a tanulók által megadott képleteket.

A *b)* nyilván nem lehet a helyes megoldás, mivel $n = 3$ esetén az ábra $1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 13$ kis négyzetből áll, míg a képlet $1 + (n - 1) \cdot 4 = 1 + (3 - 1) \cdot 4 = 9$ elemet jósol.

Az *a)*, *c)*, *d)* képletek szerinti műveleteket elvégezve:

$$\begin{aligned}(2n - 1)^2 - 4 \cdot \frac{n(n - 1)}{2} &= 4n^2 - 4n + 1 - (2n^2 - 2n) = 2n^2 - 2n + 1, \\ 1 + (1 + 2 + \dots + (n - 1)) \cdot 4 &= 1 + \frac{n(n - 1)}{2} \cdot 4 = 1 + 2n(n - 1) = 2n^2 - 2n + 1, \\ (n - 1)^2 - n^2 &= n^2 - 2n + 1 + n^2 = 2n^2 - 2n + 1.\end{aligned}$$

Látható, hogy az utóbbi három képlet bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén azonos eredményt szolgáltat, ezért vagy mindegyik helyes, vagy pedig mindegyik hibás.

A továbbiakban azt fogjuk megmutatni, hogy ezek az ötletek helyes gondolatokon alapulnak.

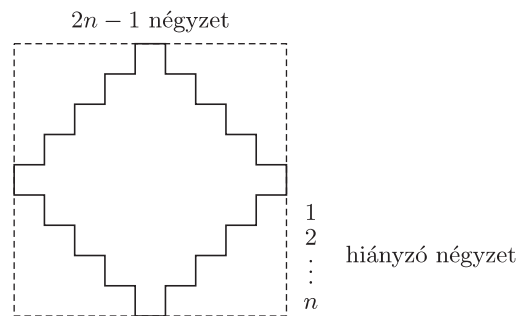
Az *a)* képlet azon az elven alapul, hogy az n . ábra befoglalható egy $2n - 1$ egység oldalú négyzetbe. Ekkor a nagy négyzet csúcsainál kialakul négy egybevágó lépcsős szerkezetű alakzat, amelynek egyes szintjei rendre $1, 2, \dots, (n - 1)$ kis négyzetből állnak.

Az eredeti ábra részleteinek számát nyilván úgy kapjuk meg, ha a nagy négyzet alkotórészeinek számából levonjuk a négy lépcsős szerkezet elemeit.

Így a

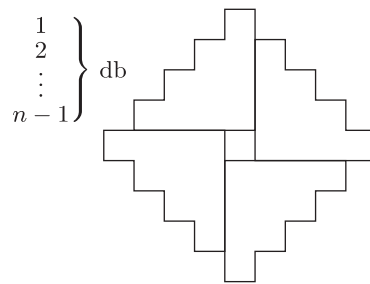
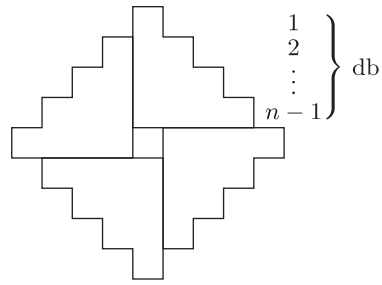
$$(2n - 1)^2 - 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) = (2n - 1)^2 - 4 \cdot \frac{n(n - 1)}{2}$$

képlethez jutunk (*1. ábra*).

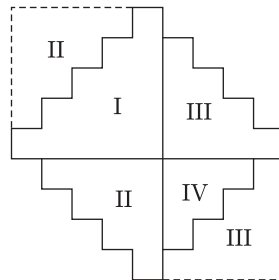


1. ábra

A *c)* képlethez akkor jutunk el, ha a *2. ábra* szerinti felosztást alkalmazzuk, vagyis kijelöljük a középső négyzetet és a többi részt négy egybevágó lépcsős alakzatra bontjuk fel, melyek egyes szintjei rendre $1, 2, \dots, (n - 1)$ kis négyzetből állnak. Így jutunk el az $1 + (1 + 2 + \dots + (n - 1)) \cdot 4$ összeghez.



2. ábra



3. ábra

A *d)* képlethez akkor jutunk el, ha a *3. ábra* szerint az ábrát balról illetve felülről az n . szinten lévő négyzet után egy-egy függőleges és vízszintes vágással 4 részre bontjuk.

A rajzon megadott számozást alkalmazva a II-es és III-as részek áthelyezésével az ábra átdarabolható egy n , illetve $n - 1$ egység oldalú négyzetbe.

Így kapjuk az alkotóelemek számára az $(n - 1)^2 + n^2$ képletet.

Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a megadottak közül az *a)*, *c)*, *d)* jelzésűek a helyes ötletek.