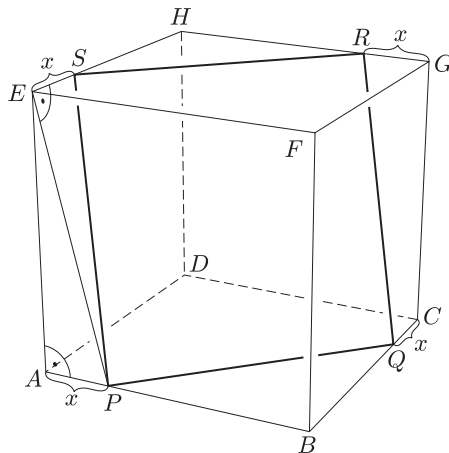


Megoldás. Megmutatjuk, hogy belefér a négyzet a kockába. Jelöljük az egységkocka csúcsait az *ábrán* látható módon. Rögzítsünk egy $0 < x < 1$ távolságot, és vegyünk fel az AB , BC , GH és HE éleken azokat a P , Q , R és S pontokat, amelyekre $AP = CQ = GR = ES = x$. Ekkor a kocka szimmetriája miatt $PQ = RS$ és mindkét szakaszt merőlegesen felezi a $BDHF$ sík, tehát a $PQRS$ négyszög téglalap.



Pithagorasz tétele segítségével az x függvényében könnyen megadhatjuk a téglalap oldalainak hosszát. A PBQ és az EAP háromszögek nyilván derék szögűek, ezért $PQ^2 = PB^2 + BQ^2 = 2(1-x)^2$ és $PE^2 = AE^2 + AP^2 = 1 + x^2$. A kocka HE éle merőleges az $ABFE$ lapra, ezért $PES \angle = 90^\circ$, tehát

$$PS^2 = PE^2 + ES^2 = 1 + 2x^2.$$

Ha tehát x -et növeljük, akkor PQ csökken, PS pedig nő. Egy téglalapba írható legnagyobb négyzet oldalának hossza megegyezik a téglalap nem hosszabb oldalának hosszával. Ezért a $PQRS$ téglalapba írható négyzet akkor lesz a legnagyobb, ha $PQ = PS$ teljesül. Ekkor

$$2(1-x)^2 = 1 + 2x^2, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{1}{4}.$$

Ebben az esetben

$$PQ = PS = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1,06 > 1,05.$$

Tehát ha a P , Q , R és S pontokat a megfelelő élek negyedelőpontjainak választjuk, akkor a kocka és a $PQRS$ sík metszetében elfér egy $1,05 \times 1,05$ -ös négyzet.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy a megoldásban konstruált $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ oldalú négyzetnél nagyobb négyzet már nem fér el az egységkockában. Ennek belátása azonban jóval nehezebb feladat, mint magának a négyzetnek a megtalálása.