

**Megoldás.** A  $\sqrt{x}$  nevezőben szerepel, így  $x > 0$ , továbbá  $x^2 - x + 1$  minden valós  $x$ -re pozitív értéket vesz fel, mivel

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

A bal oldali kifejezés becsléséhez felhasználjuk, hogy  $a > 0$  esetén  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ . Írjuk át az egyenlet bal oldalát és becsüljük meg az előbbi egyenlőtlenség segítségével:

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geq 6.$$

Tehát látjuk, hogy

$$4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \geq 6,$$
$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \geq 2.$$

Tudjuk, hogy  $x+1$  is pozitív, emiatt az egyenlőtlenséget négyzetre emelhetjük és beszorozhatunk a nevezővel:

$$x^2 + 2x + 1 \geq 4x^2 - 4x + 4,$$
$$0 \geq 3x^2 - 6x + 3,$$
$$0 \geq (x-1)^2.$$

Az egyenletnek tehát csak  $x = 1$  lehet az egyedüli megoldása. Behelyettesítés után látjuk, hogy ez valóban megoldás is.