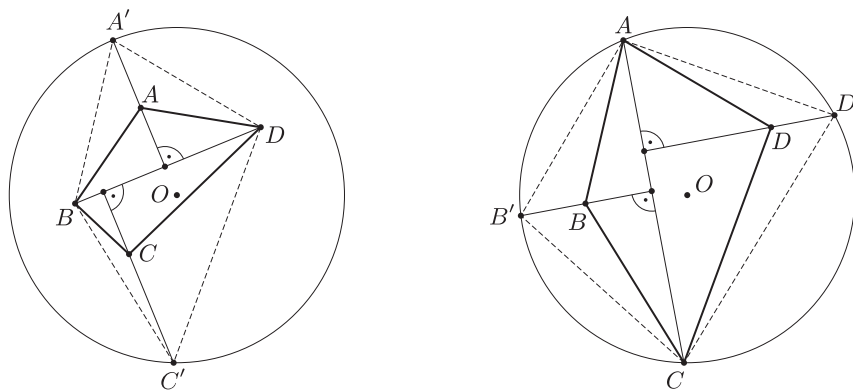


Megoldás. Amennyiben a konvex négyszög valamelyik csúcsa a körlemez belsejében helyezkedik el, a négyszög oldalait lehet úgy növelni, hogy a csúcsokat a körívre visszük ki oly módon, hogy az adott belső csúcson át nem menő átlóra merőleges, az adott pontra illeszkedő félegyenes és a körvonal metszéspontja lesz az új csúcs.



Pitagorasz-tétellel azonnal látható, hogy ezekben az esetekben a két csatlakozó oldal hossza nem csökken. Elegendő tehát húrnégyszögekre bizonyítani az állítást. Írjuk fel a négyszög területét az átlókkal és az oldalakkal is.

$$T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ACD},$$

$$\frac{ef \sin \varphi}{2} = \frac{ab \sin \beta}{2} + \frac{cd \sin \delta}{2},$$

ahol φ az átlók szöge, $\beta = \angle ABC$, $\delta = \angle CDA$; a, b, c, d a húrnégyszög oldalainak, e és f pedig az átlóinak a hossza. A húrnégyszög szemközti szögei kiegészítő szögek, szinuszaik megegyeznek, továbbá felhasználjuk a kerületi szögek szinusza és a hozzájuk tartozó húrok hossza közötti összefüggést:

$$\frac{ef \sin \varphi}{2} = \frac{ab \sin \beta}{2} + \frac{cd \sin \delta}{2} = (ab + cd) \frac{\sin \beta}{2} = (ab + cd) \frac{e}{4R}.$$

A másik átlóval is két háromszögre bontva a négyszöget:

$$T_{ABCD} = (bc + da) \frac{f}{4R}.$$

A két képlet összeszorozásával:

$$T_{ABCD}^2 = \left(\frac{ef \sin \varphi}{2} \right)^2 = (ab + cd)(bc + da) \frac{ef}{16R^2}.$$

Egyszerűsítve ef -fel, felhasználva, hogy $R = 1$, továbbá alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{ef \sin^2 \varphi}{4} \geq 2\sqrt{abcd} \cdot 2\sqrt{abcd} \frac{1}{16} = \frac{abcd}{4}.$$

Azt kaptuk, hogy

$$\frac{ef \sin^2 \varphi}{4} \geq \frac{abcd}{4}.$$

A húrnégyszög átlói legfeljebb akkorák, mint a kör átmérői, továbbá $\sin \varphi \leq 1$, tehát $abcd \leq 4$. Egyenlőség csak abban az esetben lehetséges, ha mindkét átló átmérő és 90° -os szöget zárnak be egymással, azaz a négyszög négyzet.

Megjegyzés. Az állítás csak konvex négyszögre igaz, mert legyenek például a mellékelt konkáv négyszög oldalai $a = b = \sqrt{3}$, $c = d = \sqrt{2}$. Ekkor

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = (\sqrt{3})^2 (\sqrt{2})^2 = 6.$$

