

I. megoldás. Ha $a^3 + b^3 = 1$ és a, b pozitív számok, akkor $a, b < 1$; ellenkező esetben már az egyik köbe is legalább 1 lenne. Rendezzük át az egyenlőtlenség bal oldalát és használjuk fel a feltételt is:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + (a-1)(b-1) - 1 &> 0, \\ a^2 + b^2 + (a-1)(b-1) - a^3 - b^3 &> 0, \\ a^2(1-a) + b^2(1-b) + (a-1)(b-1) &> 0. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy $0 < a, b < 1$ miatt $a^2(1-a)$ és $b^2(1-b)$ pozitívak, míg $(a-1)$ és $(b-1)$ negatívak, tehát szorzatuk szintén pozitív. A bal oldal három pozitív tag összege, az állítás igaz.

II. megoldás. Az a és b pozitív számok harmadik hatványainak összege 1, ezért mindkét szám 1-nél kisebb. Tudjuk tehát, hogy $a > a^2 > a^3$ és $b > b^2 > b^3$. Szorozzuk be az egyenlőtlenséget 2-vel és a bal oldalról mutassuk meg, hogy pozitív. Közben még egyszer felhasználjuk a feltételt is.

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2ab + 2b^2 - 2a - 2b &> a^2 + a^3 + 2ab + b^2 + b^3 - 2a - 2b = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab - 2a - 2b + 1 = (a+b-1)^2. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $a+b > a^3 + b^3 = 1$, tehát $(a+b-1)^2 > 0$.