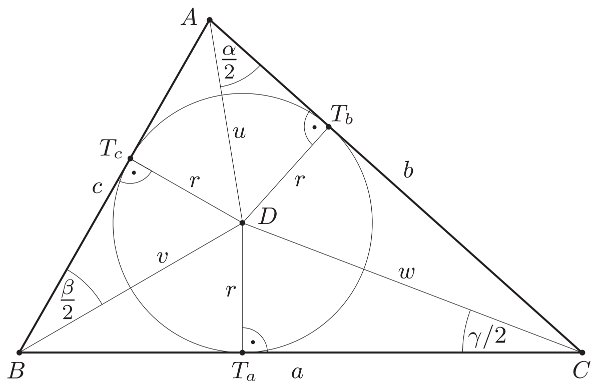
Megoldás. Legyen a beírt kör középpontja D, a beírt kör érintési pontjai T_a, T_b, T_c, sugara r. Tudjuk, hogy DT_bA, DT_aC és DT_cB derékszögű háromszögek, és D a szögfelezők metszéspontja. Tehát $\frac{r}{u} = \sin\frac{\alpha}{2}$, $\frac{r}{v} = \sin\frac{\beta}{2}$ és $\frac{r}{w} = \sin\frac{\gamma}{2}$.



Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$. Mivel a háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Ebből $\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\beta}{2} \geq \frac{\gamma}{2}$. Tudjuk továbbá, hogy $0 \leq \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. A szinusz-függvény szigorúan monoton nő a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, így

$$\sin\frac{\alpha}{2} \geq \sin\frac{\beta}{2} \geq \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Tehát $\frac{r}{u} \geq \frac{r}{v} \geq \frac{r}{w}$, vagyis $\frac{1}{u} \geq \frac{1}{v} \geq \frac{1}{w}$. A rendezési tétel alapján:

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} \geq \frac{a}{v} + \frac{b}{w} + \frac{c}{u} \quad \text{és} \quad \frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} \geq \frac{a}{w} + \frac{b}{u} + \frac{c}{v},$$

amiből

$$3 \cdot \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}\right) \geq \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}\right) + \left(\frac{a}{v} + \frac{b}{w} + \frac{c}{u}\right) + \left(\frac{a}{w} + \frac{b}{u} + \frac{c}{v}\right),$$
$$3 \cdot \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}\right) \geq (a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right).$$

Ezzel beláttuk az állítást.