

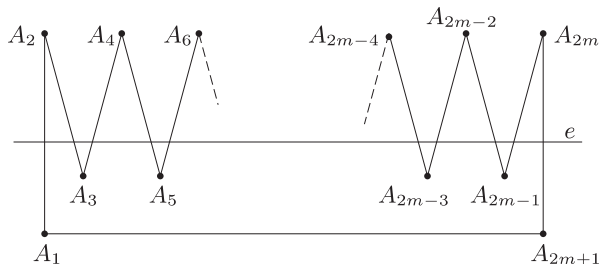
Megoldás. Megmutatjuk, hogy a keresett érték $\lceil 3n/2 \rceil$.

Egy S sík pontosan akkor metszi a gúla valamelyik élét, ha az él két végpontja S két különböző oldalán helyezkedik el. A gúla alaplapjának A síkját S valamely e egyenesben metszi. Ha az e által meghatározott két A -beli nyílt félsík a gúla csúcsai közül k , illetve ℓ darabot tartalmaz, ahol $k \leq \ell$, akkor $k + \ell \leq n$ és egyenlőség csak akkor van, ha e egyetlen csúcsot sem tartalmaz. Ezért $k \leq n/2$ mindig teljesül. Ekkor S az alaplap élei közül legfeljebb $2k$ darabot metsz, mert minden e -t metsző él egyik végpontja a k darab csúcs közül kerül ki és minden csúcsban két él találkozik. A gúla oldalélei közül S annak megfelelően metsz k , ℓ vagy 0 darabot, hogy a gúla csúcsa a sík valamelyik oldalán van, vagy illeszkedik S -re.

Tehát S a gúla élei közül legfeljebb

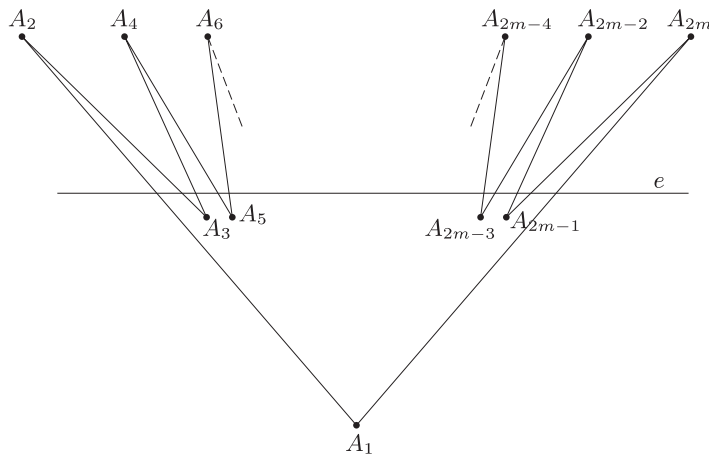
$$2k + \ell = k + (k + \ell) \leq k + n \leq 3n/2$$

darabot metsz, s mivel a metszéspontok száma egész, ezért ebből az is következik, hogy ez a szám legfeljebb $\lceil 3n/2 \rceil$.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy ez az érték el is érhető. Ehhez először minden $n \geq 3$ egészhez konstruálunk egy n -szöget és hozzá egy e egyenest úgy, hogy e a sokszög minden oldalát metszi ha n páros, ha pedig n páratlan, akkor $n - 1$ oldalt metsz. Ilyen sokszögek láthatók az 1. (n páratlan), illetve a 2. ábrán (n páros), a konstrukció az ábrák alapján nyilvánvaló. Ez a sokszög lesz a gúla alapsokszöge. Ezután felvesszük a gúla C csúcsát, majd pedig tekintünk egy olyan S síkot, amely az alapsokszög síkját e -ben metszi, C pedig azon az oldalán van, amelyiken az alapsokszögnek a nem több, azaz $\lceil n/2 \rceil$ csúcsa helyezkedik el. Ekkor S a gúlának $n = 2m$ esetén $2m$ alapélét és m oldalélét, azaz összesen $2m + m = 3n/2$ élét, $n = 2m + 1$ esetén pedig $2m$ alapélét és $m + 1$ oldalélét, azaz összesen $2m + (m + 1) = 3n/2 - 1/2$ élét metszi. Ez az érték mindkét esetben megegyezik $\lceil 3n/2 \rceil$ -szel.



2. ábra

Megjegyzés. Ha a gúla alaplapja konvex n -szög, akkor bármely sík a gúlának legfeljebb $n + 1$ élét metszi. Ez pontosan úgy látható be, ahogy a **B. 4294.** feladat megoldásában (lásd 2011. áprilisi számunk 221. oldalán) megmutattuk, hogy egy 12 lapú konvex testnek egy sík legfeljebb 12 élét metszi. A két feladat egymás utáni hónapokban volt kitűzve, a gúlás feladatot a hasábos folytatásának tekintettük. Ezért azok a megoldók, akik csak konvex alapsokszög esetén oldották meg a feladatot, 0 pontot kaptak.