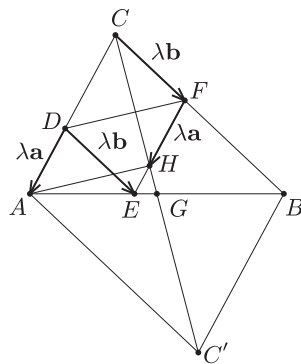


**Megoldás.** Legyen az  $AB$  oldal felezőpontja  $G$ , a  $C$  pont  $G$ -re vonatkozó tükörképe  $C'$ ,  $H$  pedig jelölje azt a pontot, melyre az  $FDAH$  négyszög paralelogramma. Először megmutatjuk, hogy  $H$  rajta van a  $CC'$  szakaszon.



1. ábra

Mivel  $DE$  párhuzamos  $CB$ -vel, az  $ADE$  és  $ACB$  háromszögek hasonlóak. Legyen a hasonlóság aránya  $\lambda$ . Ekkor  $0 < \lambda < 1$ . Ha  $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$  és  $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$ , akkor tehát  $\overrightarrow{DA} = \lambda\mathbf{a}$  és  $\overrightarrow{DE} = \lambda\mathbf{b}$ . Ezért  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = (1 - \lambda)\mathbf{a}$ , s így felhasználva, hogy a  $CDEF$  és az  $AHFD$  paralelogrammák szemközti oldalvektorai egyenlők, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} = \mathbf{a} + \overrightarrow{DF} = \mathbf{a} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD} = \\ &= \mathbf{a} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CD} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} - (1 - \lambda)\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\overrightarrow{CC'}.\end{aligned}$$

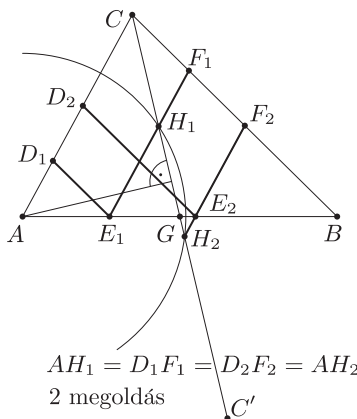
Vagyis a  $H$  pont rajta van a  $CC'$  szakaszon.

Ezek alapján a szerkesztés menete a következő. Az  $A$  csúcs, mint középpont körül  $DF$  sugárral kört rajzolunk, a kör és a  $CC'$  szakasz  $H$  metszéspontján át  $AC$ -vel párhuzamos  $e$  egyenest szerkesztünk. Az  $e$  és  $AB$ , illetve  $CB$  metszéspontjai adják a szerkesztendő paralelogramma  $E$ , illetve  $F$  csúcsát. Végül az  $E$ -n át  $CB$ -vel húzott párhuzamos kimetszi  $CA$ -ból a  $D$  pontot. Az így szerkesztett  $CDEF$  négyszög nyilván paralelogramma, s ha  $\overrightarrow{CH} = \lambda\overrightarrow{CC'} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ , akkor a párhuzamosságok miatt  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF} = \lambda\mathbf{b}$  és ezért  $\overrightarrow{DA} = \lambda\mathbf{a}$ . Ekkor viszont

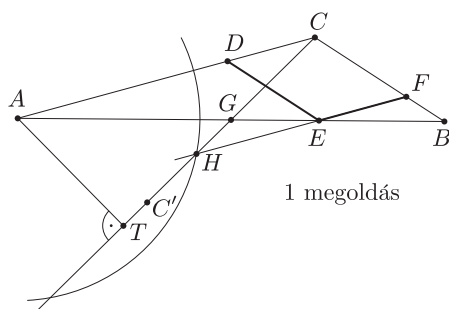
$$\overrightarrow{DF} = \lambda\mathbf{b} - (1 - \lambda)\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{a} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AH},$$

vagyis  $DF$  ugyanolyan hosszú, mint  $AH$ , tehát a  $CDEF$  négyszög eleget tesz a feltételeknek.

A megoldások száma 2, 1 vagy 0, attól függően, hogy az  $A$  középpontú  $DF$  sugarú körnek és a nyílt  $CC'$  szakasznak hány közös pontja van. Ezt részletesebben az  $A$ -ból a  $CC'$  egyenesre bocsátott merőleges  $T$  talppontjának elhelyezkedését vizsgálva írhatjuk le.



2. ábra



### 3. ábra

- 2 megoldás van, ha  $T$  a  $CC'$  szakasz belső pontja és  $AT < EF < \min\{AB, AC\}$  (2. ábra).
- 1 megoldás van, ha
  - $T$  a  $CC'$  szakasz belső pontja és  $AT = EF$ ;
  - $T$  a  $CC'$  szakasz belső pontja és

$$AT < \min\{AB, AC\} < EF < \max\{AB, AC\};$$

- $T$  nem belső pontja a  $CC'$  szakasznak és  $AT \leq \min\{AB, AC\} < EF < \max\{AB, AC\}$  (3. ábra).
- Ha az előző feltételek egyike sem teljesül, akkor nincs megoldás.

A  $DF$  átló hossza nyilván akkor minimális, ha  $AH$  minimális. Ismét megkülönböztetünk két esetet. Ha  $T$  a  $CC'$  szakasz belső pontja, akkor ez  $H \equiv T$  esetén következik be, ha pedig  $T$  nem belső pont, akkor az átló hosszának nincs minimuma. Ekkor  $DF$  legrövidebb hossza tetszőlegesen közel lehet az  $AB$  és  $AC$  oldalak közül a rövidebbikhez akkor, ha  $H$  tetszőlegesen közel van a  $C$  vagy a  $C'$  ponthoz, de minden esetben hosszabb lesz a két oldal közül a rövidebbiknél.