

I. megoldás. Mivel a, b, c pozitív számok, az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív. Vegyük az egyenlőtlenség oldalainak 10-es alapú logaritmusát. Ez a függvény szigorúan monoton növekedő, tehát a reláció iránya változatlan marad.

$$\lg(a^b b^c c^a) \leq \lg(a^a b^b c^c).$$

Alkalmazzuk most a szorzat és a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságokat.

$$\begin{aligned} \lg(a^b) + \lg(b^c) + \lg(c^a) &\leq \lg(a^a) + \lg(b^b) + \lg(c^c), \\ b \cdot \lg a + c \cdot \lg b + a \cdot \lg c &\leq a \cdot \lg a + b \cdot \lg b + c \cdot \lg c. \end{aligned}$$

Használjuk fel a rendezési tételt, miszerint két valós számokból álló azonos elemszámú sorozat permutációból képzett szorzatösszeg akkor maximális, ha a két sorozat azonosan rendezett.

Legyen most a két háromelemű sorozat a, b, c és $\lg a, \lg b, \lg c$. A logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt a két sorozat azonosan rendezett, így

$$b \cdot \lg a + c \cdot \lg b + a \cdot \lg c \leq a \cdot \lg a + b \cdot \lg b + c \cdot \lg c$$

teljesül, az átalakítások ekvivalenciája miatt az eredeti egyenlőtlenség is igaz. Egyenlőség $a = b = c$ esetén áll fenn.

II. megoldás. Először egy jól használható algebrai egyenlőtlenséget idézünk fel. Legyenek a, b, c pozitív számok, ekkor

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Kifejtés után osszunk végig kettővel, majd adjunk mindkét oldalhoz $3(ab + bc + ca)$ -t.

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca &\geq 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &\geq 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &\geq 3ab + 3bc + 3ca. \end{aligned}$$

Most mindkét oldalt a pozitív $3(a + b + c)$ -vel elosztva kapjuk, hogy

$$(1) \quad \frac{a + b + c}{3} \geq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}.$$

Alkalmazzuk két változatban a súlyozott közepek közötti ismert egyenlőtlenségeket. Először írjuk fel az a, b, c pozitív számokra, a, b, c súlyokkal a súlyozott mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(2) \quad (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}} \geq \frac{a + b + c}{a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c}} = \frac{a + b + c}{3}.$$

Ezután az a, b, c számokra b, c, a súlyokkal használjuk fel a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$(3) \quad \frac{b \cdot a + c \cdot b + a \cdot c}{a + b + c} \geq (a^b b^c c^a)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

Végül (1), (2) és (3) egybevetéséből, az egyenlőtlenség mindkét oldalát $(a + b + c)$ -edik hatványra emelve, kapjuk a feladat állítását:

$$\begin{aligned} (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}} &\geq \frac{a + b + c}{3} \geq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \geq (a^b b^c c^a)^{\frac{1}{a+b+c}}, \\ a^a b^b c^c &\geq a^b b^c c^a. \end{aligned}$$

Egyenlőség az (1) egyenlőtlenségben – és ennek megfelelően a feladat állításában is – akkor és csak akkor van, ha $a = b = c$.

Megjegyzés. Többen a rendezési tétel felhasználása nélkül esetekre bontották a vizsgálatot a, b, c nagysági sorrendje szerint. Ezzel kapcsolatos jellemző hiba volt, hogy szimmetrikusnak ítélték az egyenlőtlenséget a változóknak, s emiatt csak az esetek felére bizonyították az állítást.