Megoldás. A feladat állítása szerint léteznek olyan y és z egész számok, amelyekre $a \mid p(y)$ és $b \mid p(z)$. Írjuk föl az a és b számokat prímtényezős alakban:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t} q_1^{M_1} q_2^{M_2} \dots q_r^{M_r}, \quad b = p_1^{K_1} p_2^{K_2} \dots p_t^{K_t} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_r^{m_r}.$$

Az egységes jelölés érdekében megengedjük, hogy a szereplő prímek kitevője nulla is lehessen, és a prímeket aszerint csoportosítjuk, hogy melyik számban szerepelnek nagyobb kitevővel – vagyis $k_i \le K_i$ és $m_j \le M_j$ (minden i-re és j-re). Ekkor az

$$a_1 = q_1^{M_1} q_2^{M_2} \dots q_r^{M_r} \quad \text{és} \quad b_1 = p_1^{K_1} p_2^{K_2} \dots p_t^{K_t}$$

számok egymáshoz relatív prímek, és a legkisebb közös többszörösük

$$a_1 b_1 = q_1^{M_1} q_2^{M_2} \dots q_r^{M_r} p_1^{K_1} p_2^{K_2} \dots p_t^{K_t},$$

ami megegyezik a és b legkisebb közös többszörösével. A korábbi feltételek miatt nyilván $a_1 \mid p(y)$ és $b_1 \mid p(z)$.

Mivel a_1 és b_1 relatív prímek, a kínai maradéktétel szerint létezik olyan x egész, amelyre

$$x \equiv y \pmod{a_1}$$

és $x \equiv z \pmod{b_1}$.

Az $x \equiv y \pmod{a_1}$ miatt $p(x) \equiv p(y) \pmod{a_1}$, hiszen p egész együtthatós, és a kongruenciákat beszorozhatjuk egész számmal, hatványozhatjuk és össze is adhatjuk.

Hasonlóan, a második feltételből következik, hogy $p(x) \equiv p(z) \pmod{b_1}$. Így $p(x)$ a_1-gyel és b_1-gyel is osztható, tehát osztható a_1 és b_1 legkisebb közös többszörösével is, ami pedig egyenlő a és b legkisebb közös többszörösével.

Weisz Gellért (Fazekas M. Főv. Gyak. G. 10. évf.)
dolgozata alapján