

I. megoldás. Az $ABCD$ tetraéder egy P belső pontjának a lapoktól vett távolságait jelölje rendre m_a, m_b, m_c és m_d , az egyes lapok területét pedig t_a, t_b, t_c és t_d . Ekkor az $ABCD$ tetraéder térfogata megegyezik a $PBCD$, $PACD$, $PABD$ és $PABC$ tetraéderek térfogatának összegével, vagyis

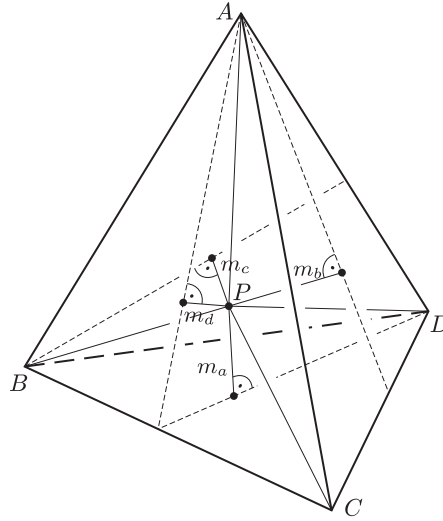
$$V_{ABCD} = \frac{m_a t_a}{3} + \frac{m_b t_b}{3} + \frac{m_c t_c}{3} + \frac{m_d t_d}{3}$$

P -től független állandó. Amennyiben mind a négy lap területe egyenlő, s e közös területet t jelöli, akkor ebből azt kapjuk, hogy

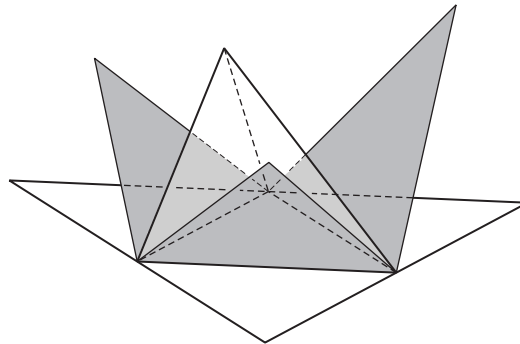
$$m_a + m_b + m_c + m_d = \frac{3 \cdot V_{ABCD}}{t}.$$

Tehát minden olyan tetraéderre, amelynek lapjai egyenlő területűek, teljesül, hogy bármely belső pontjának az oldal-lapoktól vett távolságösszege állandó.

Ilyen tetraédereket könnyen megadhatunk.¹ Vagyis a feladat kérdésére a válasz: az állítás nem igaz.



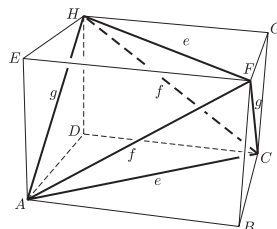
1. ábra



2. ábra

II. megoldás. Vegyünk egy megfelelő tetraédert. Ennek lapjainak területe legyen t_1, t_2, t_3 és t_4 . Vegyünk két benne lévő pontot, ezeknek a lapoktól mért távolsága legyen d_1, d_2, d_3 és d_4 , illetve c_1, c_2, c_3 és c_4 .

¹Ha például a lapok egybevágóak, akkor nyilván teljesítik a feltételt. Legyen $ABCDEFGH$ egy téglatest, aminek AC és FH két párhuzamos lapon lévő, egy egymással nem párhuzamos lapátlója. Ekkor, ha a téglatest egy csúcsban találkozó három lapja átlóinak hossza e, f és g , akkor az $ACFH$ tetraéder minden lapjának pontosan egy e , egy f és egy g hosszúságú éle van. Ha a téglatest nem kocka, akkor lapátlói közt vannak különböző hosszúságúak, ezért ekkor az $ACFH$ tetraéder nem szabályos.



Bontsuk fel a tetraédert a pontok mentén kisebb tetraéderekre, ekkor a térfogat nem változik:

$$d_1 t_1 + d_2 t_2 + d_3 t_3 + d_4 t_4 = c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + c_4 t_4.$$

Egyszerűsítsük le a problémát. Legyenek a tetraéder alaplapjai egyenlő nagyságúak:

$$\begin{aligned}(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)t &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)t, \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4.\end{aligned}$$

Ha az alaplapok egyenlő nagyságúak, akkor bármely belső pontnak a lapoktól mért távolságösszege egyenlő. Keressünk azonos területű lapokból álló tetraédereket. Vegyünk egy tetszőleges háromszöget, rajzoljuk meg a középvonalait, és hajtsuk fel azokat a háromszögeket, melyeknek oldalai közül kettő érintkezik a háromszög eredeti oldalával, a harmadik pedig a háromszög egy középvonala (2. ábra). A felhajtott háromszögek és a megmaradt alap egy tetraédert határoznak meg. Minden lap egybevágó, tehát területük megegyezik. Ezzel a feladat alapállítása nem igaz, mivel találtunk egy ellenpéldát. Gyarmati Máté (Pécs, Leőwey Klára G., 10. évf.)

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha egy tetraéder lapjai egyenlő területűek, akkor a lapok egybevágók is. Ebből az is következik, hogy a tetraédert a megoldásban leírt módon kaphatjuk meg valamely téglatestből (vagyis a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonja téglatest). Ennek bizonyítása megtalálható például Reiman I.: *Fejezetek az elemi geometriából* című gimnáziumi tankönyvének 9. fejezetében.