

I. megoldás. Az A, B, C pontokat az e egyenesre merőlegesen vetítve, a kapott pontokat jelölje rendre A_1, B_1, C_1 . Pithagorasz tétele szerint

$$PA^2 + 2PB^2 + 3PC^2 = (PA_1^2 + 2PB_1^2 + 3PC_1^2) + (AA_1^2 + 2BB_1^2 + 3CC_1^2).$$

Az e egyenest a számegyenessel azonosítva, az A_1, B_1, C_1 pontok koordinátája legyen rendre a, b, c , az ismeretlen P pont koordinátája pedig x . Mivel $AA_1^2 + 2BB_1^2 + 3CC_1^2$ állandó, a szóban forgó összeg akkor a legkisebb, amikor

$$PA_1^2 + 2PB_1^2 + 3PC_1^2 = (x - a)^2 + 2(x - b)^2 + 3(x - c)^2$$

értéke a lehető legkisebb. Ezt az x -ben másodfokú kifejezést teljes négyzetté kiegészítve

$$6 \left(x - \frac{a + 2b + 3c}{6} \right)^2 + (a^2 + 2b^2 + 3c^2) - \frac{(a + 2b + 3c)^2}{6}$$

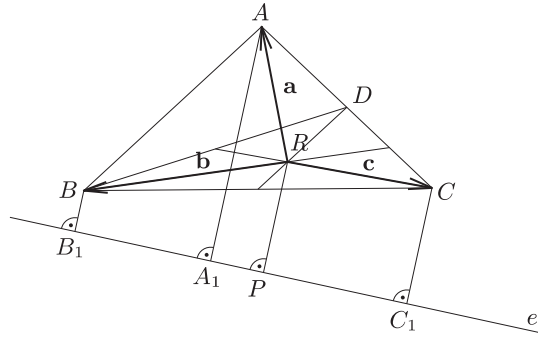
adódik. Ez nyilván akkor a legkisebb, ha

$$x = \frac{a + 2b + 3c}{6} = \frac{\frac{a+c}{2} + b + c}{3}.$$

Ekkor a P pont éppen a BCD háromszög súlypontjának az e egyenesre eső merőleges vetülete, ahol D az AC szakasz felezőpontját jelöli.

II. megoldás. Legyen R olyan pont, melyből induló $\overrightarrow{RA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{RB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{RC} = \mathbf{c}$ vektorokra teljesül az $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = \mathbf{0}$ összefüggés, továbbá legyen $\overrightarrow{RP} = \mathbf{p}$. Azt, hogy ilyen R pont létezik, később bizonyítjuk. Ekkor

$$\begin{aligned} PA^2 + 2PB^2 + 3PC^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + 2(\mathbf{b} - \mathbf{p})^2 + 3(\mathbf{c} - \mathbf{p})^2 = \\ &= (\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 + 3\mathbf{c}^2) + 6\mathbf{p}^2 - 2\mathbf{p}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) = (\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 + 3\mathbf{c}^2) + 6\mathbf{p}^2. \end{aligned}$$



Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ rögzített vektorok, ezért a kifejezés értéke akkor a legkisebb, ha $\mathbf{p}^2$ értéke a lehető legkisebb. Ez akkor következik be, amikor az RP szakasz hossza minimális, azaz a keresett pont éppen R -nek az e egyenesen lévő merőleges vetülete.

Meg kell még határoznunk az $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = \mathbf{0}$ összefüggésnek eleget tevő R pontokat. Megmutatjuk, hogy pontosan egy ilyen tulajdonságú pont van, s ez annak a BCD háromszögnek a súlypontja, melynek D csúcsa az AC szakasz felezőpontja.

Ha ugyanis $\overrightarrow{RD} = \mathbf{d}$, akkor a súlypont tulajdonságaiból következően $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, D felezőpont volta miatt pedig $\mathbf{d} = (\mathbf{a} + \mathbf{c})/2$, vagyis

$$\mathbf{0} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}}{2}.$$

Tehát ez a pont eleget tesz a követelménynek.

Ha valamely T pontra teljesül, hogy $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} + 3\overrightarrow{TC} = \mathbf{0}$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} + 3\overrightarrow{TC} = (\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RA}) + 2(\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RB}) + 3(\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RC}) = \\ &= 6\overrightarrow{TR} + \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = 6\overrightarrow{TR}, \end{aligned}$$

tehát $\overrightarrow{TR} = \mathbf{0}$, azaz T egybeesik R -rel.

Megjegyzés. Ha adott egy ABC háromszög, valamint az α, β, γ valós számok, melyekre $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ teljesül, akkor megmutatható, hogy pontosan egy olyan P pont van, melyre fennáll az $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ összefüggés, másrészt pedig a háromszög síkjának bármely pontjához létezik olyan (α, β, γ) skalárszorzó erejéig egyértelmű, rendezett számhármas, melyre teljesül az összefüggés. Az érdeklődő olvasó ennek részletes leírását megtalálja például Hajós Gy.: *Bevezetés a geometriába* című könyvében a *baricentrikus koordinátákról* szóló 35.5. részben.