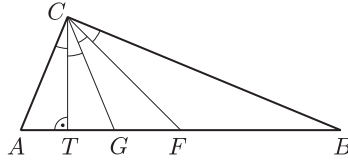


Megoldás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög C csúcsánál lévő szögét négy egyenlő részre osztja a CT magasságvonal, a CF súlyvonal és a CG szögfelező. Jelöljük a háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon a , b , c , illetve α , β , γ -val. Ha $a = b$, akkor a T , F és G pontok egybeesnek. Tehát $a \neq b$. Az oldalak szimmetrikus szerepe miatt feltehetjük, hogy $a > b$ teljesül. Mivel T az AB oldal belső pontja, $\alpha < 90^\circ$ és $\beta < 90^\circ$ is teljesül, továbbá $a > b$ miatt $\alpha > \beta$, amiből viszont $\angle ACT < 90^\circ - \alpha < 90^\circ - \beta = \angle BCF$ következik.



Ezért az ABC háromszög C csúcsához tartozó szögfelező a BCT szögtartományban halad, tehát T az AG szakasz belső pontja. A szögfelezőtétel következménye szerint $AG = \frac{bc}{a+b} < \frac{c}{2}$, ezért G az AF szakasz belső pontja. Vagyis az A , T , G , F , B pontok ebben a sorrendben követik egymást.

A hasonlóságok nem változtatják meg a szögeket, ezért feltehetjük, hogy $CT = 1$, továbbá az egyszerűség kedvéért vezessük be a $\delta = \gamma/4$ jelölést.

Ekkor $\angle ACT = \angle TCG = \angle GCF = \angle FCB = \delta$, ezért $AT = TG = \tan \delta$, $TF = \tan 2\delta$ és $TB = \tan 3\delta$, vagyis

$$\tan \delta + \tan 2\delta = AT + TF = AF = FB = TB - TF = \tan 3\delta - \tan 2\delta.$$

Vezessük be a $z = \tan \delta$ jelölést és alkalmazzuk a tangens függvény addíciós képletét, mely szerint:

$$\tan 2\delta = \frac{2 \tan \delta}{1 - \tan^2 \delta} = \frac{2z}{1 - z^2} \quad \text{és} \quad \tan 3\delta = \frac{\tan \delta + \tan 2\delta}{1 - \tan \delta \tan 2\delta} = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2},$$

a következő egyenletet kapjuk:

$$z + \frac{4z}{1 - z^2} = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}.$$

Hozzunk közös nevezőre:

$$(5z - z^3)(1 - 3z^2) = (3z - z^3)(1 - z^2)$$

egyenlet adódik, amit $z \neq 0$ -val osztva majd rendezve a $z^4 - 6z^2 + 1 = 0$ egyenletet kapjuk, ami z^2 -re nézve másodfokú. Ennek megoldásai a megoldóképlet alapján, valamint a $3 \pm \sqrt{8} = (\sqrt{2} \pm 1)^2$ összefüggést felhasználva:

$$z = \pm(\sqrt{2} \pm 1).$$

Mivel $0^\circ < \delta < 45^\circ$, csak a $0 < z < 1$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő $z = \sqrt{2} - 1$ megoldás adhat megfelelő háromszöget. Ebből kapjuk, hogy

$$\delta = \arctan(\sqrt{2} - 1) = 22,5^\circ.$$

Mivel $\gamma = 4\delta$, azért a háromszög derékszögű. Bármely derékszögű háromszögben a derékszögű csúcsához tartozó magasságvonalnak a befogókkal bezárt szögei megegyeznek a háromszög hegyesszögeivel, tehát csak olyan derékszögű háromszög tehet eleget a feladat feltételeinek, melynek egyik hegyesszöge $22,5^\circ$.

Ha az ABC háromszögben ez teljesül, akkor

$$\angle AGC = 180^\circ - (\angle CAG + \angle ACG) = 180^\circ - (67,5^\circ + 45^\circ) = 67,5^\circ = \angle CAG,$$

tehát az AGC háromszög egyenlő szárú, azaz CT felezi az ACG szöget, s ezért negyedeli az ACB szöget. Mivel a derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja, az FBC háromszög is egyenlő szárú, tehát $\angle FCB = \angle FBC = 22,5^\circ = \frac{90^\circ}{4}$, vagyis a C -hez tartozó súlyvonal is negyedeli az ott lévő szöget.

Tehát a feladat feltételeinek pontosan azok a derékszögű háromszögek tesznek eleget, amelyeknek egyik hegyesszöge $22,5^\circ$.