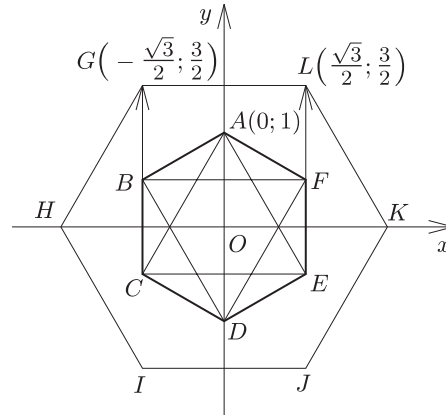
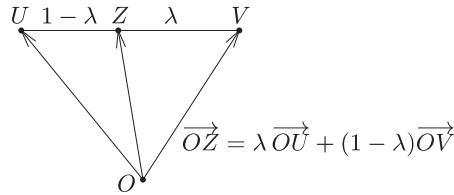


Megoldás. Jelölje a keresett ponthalmazt $\mathcal{H}$. A BF szakaszt az $\overrightarrow{OA}$ vektorral eltolva a GL szakaszt kapjuk, ahol $G(-\sqrt{3}/2; 3/2)$ és $L(\sqrt{3}/2; 3/2)$. Tehát a GL szakasz pontjai a $\mathcal{H}$ halmazhoz tartoznak. Szimmetriaokok miatt ugyanígy kapjuk, hogy az O középpontú $GHIJKL$ szabályos hatszög kerületének minden pontja $\mathcal{H}$ -hoz tartozik, ahol $H(-\sqrt{3}; 0)$, $I(-\sqrt{3}/2; -3/2)$, $J(\sqrt{3}/2; -3/2)$ és $K(\sqrt{3}; 0)$.



1. ábra



2. ábra

Valamely $\mathcal{K}$ ponthalmaz pontosan akkor konvex, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza. Ezt vektorok segítségével könnyen leírhatjuk: ha $U, V \in \mathcal{K}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ tetszőleges valós szám és $\overrightarrow{OZ} = \lambda \overrightarrow{OV} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OU}$, akkor $Z \in \mathcal{K}$. Ezt felhasználva egyszerűen beláthatjuk, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz konvex. Ha $P, Q \in \mathcal{H}$, akkor alkalmas $P_i, Q_i \in \mathcal{H}_i$ pontokkal

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}$$

teljesül. Ezért minden $0 \leq \lambda \leq 1$ szám esetén a $\mathcal{H}_i$ halmazok konvex volta miatt

$$\lambda \overrightarrow{OP} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OQ} = (\lambda \overrightarrow{OP_1} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OQ_1}) + (\lambda \overrightarrow{OP_2} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OQ_2}) \in \mathcal{H}.$$

Tehát $\mathcal{H}$ tartalmazza a $GHIJKL$ hatszöglemez minden pontját.

Megmutatjuk, hogy más pontot viszont nem tartalmaz. Mivel $\mathcal{H}_1$, illetve $\mathcal{H}_2$ minden pontjának második koordinátája legfeljebb 1, illetve 1/2, $\mathcal{H}$ minden pontjának második koordinátája legfeljebb 3/2. Tehát $\mathcal{H}$ egyetlen pontja sincs a GL egyenes fölött. Szimmetriaokokból ugyanígy kapjuk, hogy a $GHIJKL$ hatszög bármely oldalegyenesének az origót tartalmazó oldalára esik $\mathcal{H}$ minden pontja.

Tehát a keresett pontok halmaza megegyezik a $GHIJKL$ szabályos hatszöglemezzel.