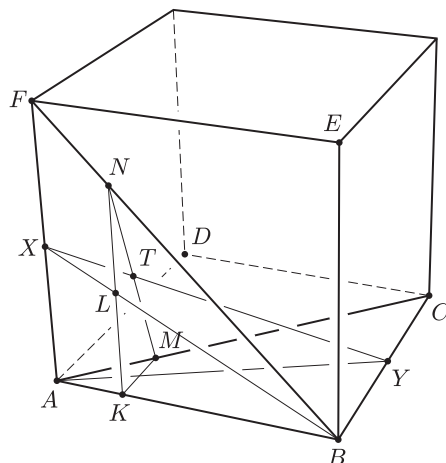


I. megoldás. Legyen az MN szakasz felezőpontja T . Ha $M = A$, s ezért $N = F$, akkor T az AF él X felezőpontja, ha pedig $M = C$, s ezért $N = B$, akkor T a BC él Y felezőpontja. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely az XY szakasz.



1. ábra

Mivel $AM = FN$ és az AC , valamint FB lapátló egyenesek a kocka ADF oldallapjának S síkjával ugyanakkora szöveget zárnak be, az S síktól az M és N pontok egyenlő távolságra vannak. Legyen az M -en és N -en átmenő, S -sel párhuzamos T sík és az AB egyenes dőléspontja K . Ekkor KN párhuzamos AF -fel, tehát a BKN és BAF háromszögek középpontosan hasonlóak. Ezért a KN szakasz L felezőpontja rajta van a BX egyenesen.

A KMN háromszögben LT középvonal, ezért párhuzamos KM -mel, s így az Y -t tartalmazó BC -vel is. Ez viszont azt jelenti, hogy ha az XPY háromszöget X -ből középpontosan kicsinyítjük olyan arányban, hogy B képe L legyen, akkor Y képe T lesz, tehát T rajta van az XY szakaszon.

Megfordítva, ha T az XY szakasz tetszőleges belső pontja, akkor legyen a T -n átmenő S -sel párhuzamos síknak az AB , XB , AC és FB szakaszokkal való metszéspontja rendre a K , L , M és N . Ekkor a párhuzamos szelők tételéből következik, hogy LT középvonal a KMN háromszögben, tehát T az MN szakasz felezőpontja. Másrészt ugyancsak a szelőtétel szerint

$$AM : AC = AK : AB = FN : FB,$$

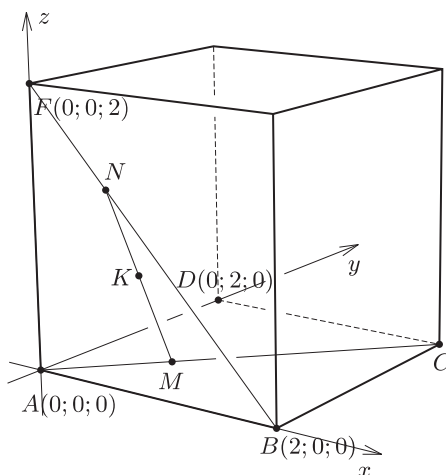
vagyis $AC = FB$ miatt $AM = FN$.

Tehát T előáll valamely megfelelő szakasz felezőpontjaként.

II. megoldás. Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az A pont legyen az origó, a B , D és F pontok rendre az x -, y - és z -tengely pozitív felére essenek, az egységet pedig úgy válasszuk, hogy e három pont esetén a 0-tól különböző koordináta 2 legyen (2. ábra).

Ekkor $C(2; 2; 0)$, az AC szakaszon lévő M pont koordinátái $(2a; 2a; 0)$ valamely $0 \leq a \leq 1$ valós számra, s az AM szakasz hossza $2\sqrt{2}a$. Mivel a BF szakaszon lévő pontok koordinátái $t \cdot (2; 0; 0) + (1 - t) \cdot (0; 0; 2) = (2t; 0; 2 - 2t)$ alakúak, ahol $0 \leq t \leq 1$, azért ha az N ponthoz a t paraméterérték tartozik, akkor az FN szakasz hossza

$$\sqrt{(2t - 0)^2 + ((2 - 2t) - 2)^2} = 2\sqrt{2}t.$$



2. ábra

Az $AM = FN$ feltételből tehát az következik, hogy $a = t$, vagyis N koordinátái $(2a; 0; 2 - 2a)$. Tehát az MN szakasz K felezőpontjának koordinátái $(2a; a; 1 - a)$.

Mivel a tetszőleges 0 és 1 közti értéket felvehet, a keresett mértani hely megegyezik a

$$\mathcal{K} = \{(2a; a; 1 - a) : 0 \leq a \leq 1\}$$

ponthalmazzal. Az $X = 2a$, $Y = a$, $Z = 1 - a$ feltételekből azt kapjuk, hogy $\mathcal{K}$ része az $X/2 = Y = -Z + 1$ egyenletrendszerű egyenesnek. S mivel a minden 0 és 1 közti értéket felvesz, azért $\mathcal{K}$ éppen az ezen az egyenesen lévő $(0; 0; 1)$ és $(2; 1; 0)$ pontok összekötő szakasza. E két pont a kocka AF , illetve BC élének felezőpontja, tehát a keresett mértani hely e két élfelezőpont összekötő szakasza.

III. megoldás. A tér tetszőleges P pontjának helyvektorát jelölje $\mathbf{p}$. Ekkor az AF él X és a BC él Y felezőpontjának helyvektora $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{f}}{2}$, illetve $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$. Minthogy $AC = BF$, ha valamely $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén M az AC lapátlót $\lambda : (1 - \lambda)$ arányban osztó pont, akkor az N pont az FB lapátlót szintén $\lambda : (1 - \lambda)$ arányban osztja, és viszont. Ekkor az MN szakasz Z felezőpontjára

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{m} + \mathbf{n}}{2} = \frac{((1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}) + ((1 - \lambda)\mathbf{f} + \lambda\mathbf{b})}{2} = (1 - \lambda) \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{f}}{2} + \lambda \cdot \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2},$$

vagyis $\mathbf{z} = (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$, tehát ekkor Z is $\lambda : (1 - \lambda)$ arányban osztja az XY szakaszt. Ezért a keresett mértani hely éppen az XY szakasz.