

Megoldás. Az úrhajósok legyenek egy (a közönséges értelemben teljes) gráf csúcsai. A csúcshármasokat színezzük ki két színnel, késsel és pirossal. Azt kell megmutatni, hogy ha a csúcsok száma legalább 11 000, akkor vagy van 5 olyan csúcs, amelyben bármelyik hármas színe kék, vagy van 4 olyan csúcs, amelyben egyik hármas színe sem kék. Tehát az a kérdés, hogy legfeljebb mennyi $R_3(5, 4)$, vagyis a legkisebb olyan $n = R_3(5, 4)$ szám, amelyre ha egy n csúcsú gráfban két színnel – késsel és pirossal – színezzük a hármasokat, akkor vagy van 5 olyan csúcs, amelyek közül bármely hármas kék, vagy van 4 olyan csúcs, amelyben bármely hármas színe piros. Általában az a kérdés, hogy legfeljebb mennyi $R_3(a, b)$ értéke.

Megmutatjuk, hogy

$$R_3(a, b) \leq R_2(R_3(a-1, b), R_3(a, b-1)) + 1.$$

Legyen $R_2(R_3(a-1, b), R_3(a, b-1)) + 1 = k$. Tekintsünk egy k csúcsú teljes gráfot, és abban a csúcshármasok halmazának tetszőleges színezését. Vegyünk ki egy csúcsot, az legyen A . A megmaradt $k-1$ csúcsú gráfban a B és C csúcsokat összekötő él színe legyen kék, ha az ABC csúcshármas színe kék, és legyen piros, ha az ABC csúcshármas színe piros. $R_2(R_3(a-1, b), R_3(a, b-1))$ azt jelenti, hogy a $k-1$ csúcsú gráfban vagy van $R_3(a-1, b)$ csúcs, amiben bármely él kék, vagy van $R_3(a, b-1)$ csúcs, amiben bármely él piros.

Nézzük először azt az esetet, amikor van $R_3(a-1, b)$ csúcs, amiben bármely él színe kék. Ha van $R_3(a-1, b)$ csúcs, akkor ez azt jelenti, hogy közülük vagy van $a-1$ csúcs úgy, hogy bármely hármas színe kék, vagy van b csúcs úgy, hogy bármely hármas színe piros. Tegyük fel, hogy nem volt $a-1$ csúcs úgy, hogy közülük bármely hármas színe kék. Ekkor volt olyan b csúcs, hogy bármely hármas színe piros, ezért az eredeti gráfban is van b olyan csúcs, hogy bármely hármas színe piros. Ha pedig volt $a-1$ olyan csúcs, hogy bármely hármas színe kék, akkor ezekhez a csúcsokhoz vegyük hozzá A -t. Mivel az $a-1$ csúcs között bármelyik hármas színe kék, és bármely él színe kék, emiatt ha hozzá vesszük A -t, akkor az bármelyik pontpárral egy kék hármasot alkot, tehát az a csúcs közül bármely hármas színe kék. Ekkor az eredeti gráfban is volt a olyan csúcs, amiben bármely hármas színe kék. Így igaz, hogy az eredeti k csúcsú gráfban vagy van a olyan csúcs, hogy bármely hármas színe kék, vagy van b olyan csúcs, hogy bármely hármas színe piros.

Most nézzük azt az esetet, amikor nincs $R_3(a-1, b)$ csúcs, amiben bármely él kék. Ekkor van $R_3(a, b-1)$ csúcs, amiben bármely él piros. Ha van $R_3(a, b-1)$ csúcsunk, akkor azok közül vagy van a csúcs úgy, hogy bármely hármas színe kék, vagy van $b-1$ csúcs úgy, hogy bármely hármas színe piros. Ha van a csúcs úgy, hogy bármely hármas színe kék, akkor az eredeti k csúcsú gráfban is van a csúcs, úgy, hogy bármely hármas színe kék. Ha nincs a olyan csúcs, hogy bármely hármas színe kék, akkor van $b-1$ olyan csúcs, hogy bármely hármas színe piros. Ezekhez vegyük hozzá A -t. Mivel az a csúcs közül bármely hármas színe piros, és bármely él színe is piros, emiatt az A bármely pontpárral piros hármasot alkot. Ekkor az eredeti k csúcsú gráfban van b olyan pont, hogy bármely hármas színe piros. Ekkor is igaz, hogy vagy van a csúcs, hogy bármely hármas színe kék, vagy van b csúcs, hogy bármely hármas színe piros. Tehát valóban

$$R_3(a, b) \leq R_2(R_3(a-1, b), R_3(a, b-1)) + 1.$$

Ismert tétel, hogy

$$R_2(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1} + 1.$$

Bebizonyítom, hogy $R_3(a, 3) = a$. Ehhez először megmutatom, hogy $R_3(a, 3) \geq a$. Ha ugyanis $R_3(a, 3)$ kisebb lenne a -nál, akkor ez azt jelentené, hogy $R_3(a, 3)$ csúcs esetén mindenképpen van piros színű hármas, ami nyilván nem igaz; így $R_3(a, 3) \geq a$. Viszont a csúcs esetén vagy van piros hármas, vagy pedig az a csúcsból képezhető valamennyi hármas kék, tehát $R_3(a, 3) \leq a$, ezért valóban $R_3(a, 3) = a$.

Mindezeket felhasználva:

$$R_3(5, 4) \leq R_2(R_3(4, 4), R_3(5, 3)) + 1,$$

és tudjuk, hogy $R_3(5, 3) = 5$. Valamint

$$R_3(4, 4) \leq R_2(R_3(3, 4), R_3(4, 3)) + 1.$$

Mivel $R_3(3, 4) = R_3(4, 3) = 4$, emiatt

$$R_3(4, 4) \leq \binom{4+4-2}{4-1} + 1 = \binom{6}{3} + 1 = 21,$$

így

$$R_3(5, 4) \leq R_2(21, 5) + 1 \leq \binom{21+5-2}{21-1} + 1 = \binom{24}{4} + 1 = 10\,627,$$

vagyis már 10 627 pontnál is igaz, hogy vagy van 5 olyan pont, ahol bármely hármas kék, vagy van 4 olyan csúcs, hogy bármely hármas színe piros. Tehát elég 11 000 úrhajós ahhoz, hogy a feladat követelményei teljesüljenek.

⁰Legalább $R_2(a, b)$ számú csúcsot tartalmazó teljes gráfban ha két színnel, késsel és pirossal színezzük az éleket, vagy van a db olyan csúcs, amelyek közül bármely kettő kék, vagy van b db olyan csúcs, amelyek közül bármely kettő piros.

Megjegyzés. A megoldásban felhasznált

$$R_2(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1} + 1$$

összefüggés például az $a + b$ szerinti indukcióval látható be, a binomiális együtthatókra teljesülő

$$\binom{a+b-2}{a-1} = \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1}$$

azonosság segítségével. Az állítás például megtalálható Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok* c. könyvében (az állítás a 101. oldalon levő 1.(a) feladatban, a megoldás pedig az 577. oldalon olvasható.)