

Megoldás. Legyen $A_{n+1} = np_1^{1!}p_2^{2!}\dots p_n^{n!} + 1$. Először megmutatjuk, hogy minden prím legfeljebb egyszer szerepelhet a sorozatban. Ha ugyanis lenne két index, $i < j$, amelyekre $p_i = p_j$, akkor $(j-1)p_1^{1!}p_2^{2!}\dots p_{j-1}^{(j-1)!}$ osztható p_j -vel, mert tényezői között szerepel a p_i , így ha hozzáadunk 1-et, akkor nem lesz osztható vele; ez viszont ellentmond p_j definíciójának.

Tegyük föl, hogy van olyan p prím, amely nem szerepel a sorozatban. Belátjuk, hogy ekkor az A_n sorozat végtelen sok tagja osztható p -vel. Ez adja majd az ellentmondást, hiszen ha tekintjük a p -vel osztható A_n számokat, illetve azok legkisebb prímosztóját, akkor ezek nyilván nem nagyobbak p -nél, ugyanakkor mind különbözőek a fenti észrevételünk szerint, ami lehetetlen. Tehát elegendő belátnunk, hogy ha a p prím nem szerepel a sorozatban, akkor az A_n sorozat végtelen sok tagja osztható p -vel.

Legyen $L = p_1^{1!}p_2^{2!}\dots p_{p-2}^{(p-2)!}$; ez nyilván nem osztható p -vel, mert egyik tényezője sem osztható p -vel (és p prím).

Legyen $n > p-1$, ekkor $A_{n+1} = n \cdot L \cdot p_{p-1}^{p-1!}p_p^{p!}\dots p_n^{n!} + 1$. Itt a $p_k^{k!}$ ($k > p-2$) alakú tényezők p -vel való maradéka mindig 1 a kis Fermat-tétel szerint, hiszen p_k nem osztható p -vel, illetve $k!$ osztható $(p-1)$ -gyel, mert az az egyik szorzó tényezője ($p_k^{k!} \equiv p_k^{(p-1)b} \equiv (p_k^{p-1})^b \equiv 1^b \pmod{p}$).

Így $A_{n+1} \equiv (n \cdot L + 1) \pmod{p}$, ha $n > p-1$. Ezért, ha $n \cdot L \equiv (-1) \pmod{p}$ -nek létezik n -re nézve megoldása, akkor készen vagyunk, mert ha n_0 egy ilyen megoldás, akkor az A_{tp+n_0+1} számok mindegyikére

$$A_{tp+n_0+1} \equiv (tp + n_0) \cdot L + 1 \equiv n_0 \cdot L + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

– legalábbis, ha t elég nagy ahhoz, hogy $tp + n_0$ nagyobb legyen $(p-1)$ -nél; ez biztosítja, hogy az A_n sorozat végtelen sok tagja osztható p -vel.

Végül az $n \cdot L \equiv (-1) \pmod{p}$ kongruenciának azért van megoldása, mert p prím, L pedig nem osztható p -vel, így L és p relatív prímek; emiatt a $0, L, 2L, 3L, \dots, (p-1)L$ számok mind különböző maradékot adnak p -vel osztva, tehát e p darab szám valamelyikének a maradéka -1 .