

Megoldás. Nézzünk néhány elemet a sorozat elejéről, ha a kezdő elem 0:

$$a'_1 = 0, \quad a'_2 = 1, \quad a'_3 = 7, \quad a'_4 = 85 = 5 \cdot 17, \quad a'_5 = 7651 = 7 \cdot 1093,$$

$$a'_6 = 58\,537\,801 + 38\,255 + 1 = 58\,576\,057,$$

$$\begin{aligned} a'_7 &= 3\,431\,154\,453\,667\,249 + 292\,880\,285 + 1 = 3\,431\,154\,746\,547\,535 = \\ &= 5\,766\,646\,632\,853 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17. \end{aligned}$$

Az utolsó számnál az $5\,766\,646\,632\,853$ nem osztható az 5 , 7 , 17 , 1093 egyikével sem, így van még ezeken kívül legalább egy prímosztója.

Mivel – a rekurzió miatt – a sorozat bármely elemének egy adott számmal való osztási maradéka kizárólag az öt közvetlenül megelőző elem osztási maradékától függ láthatjuk, hogy ha egy ilyen sorozat k -adik eleme, a_k osztható 7 -tel, akkor a $k + 2t$ -edik elemek mindegyike osztható 7 -tel, hiszen ekkor az a_k szám 7 -es maradéka megegyezik a fenti $a'_1 = 0$ kezdőelem 7 -es maradékával, így az a_{k+2} 7 -es maradéka megegyezik a fenti $a'_3 = 7$ maradékával stb. Hasonló állítás érvényes 7 helyett bármilyen számra, például az 5 -nél és a 17 -nél minden harmadik tag adja ugyanazt a maradékot, az $M = 5\,766\,646\,632\,853$ pedig minden hatodik lépésben jelenik meg.

Az eddigi észrevételek alapján olyan sorozatot készítettünk, amelynek mindegyik eleme (valódi módon) osztható az 5 , 7 , 17 , M számok valamelyikével. Megfigyeléseink szerint elegendő, ha ez a sorozat első hat tagjára teljesül (a valódi oszthatóságot az biztosítja a továbbiakban is, hogy a sorozat szigorúan monoton nő). Ehhez a kezdőtagot kell alkalmasan megválasztani. Tekintsük a következő táblázatot:

5 és 7	17	M
1	7	0
7	$5 \cdot 17$	1
$5 \cdot 17$	$7 \cdot 1093$	7
$7 \cdot 1093$	$58\,576\,057$	$5 \cdot 17$
$58\,576\,057$	$5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot M$	$7 \cdot 1093$
$5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot M$	...	$58\,576\,057$
...	...	$5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot M$

Táblázatunk szerint, ha a sorozat kezdőtagja 5 -tel és 7 -tel osztva 1 -et, 17 -tel osztva 7 -et ad maradékul és osztható M -mel, akkor az $1.$, $2.$, $3.$, $4.$, $5.$, $6.$ tag rendre osztható lesz M -mel, $7 \cdot 17$ -tel, 5 -tel, 7 -tel, 17 -tel, $5 \cdot 7$ -tel.

Tehát elegendő, ha a sorozat első eleme olyan A pozitív egész, amely 5 -tel és 7 -tel osztva 1 -et, 17 -tel osztva 7 -et ad maradékul és osztható $2M$ -mel. Az 5 , 7 , 17 és $2M$ számok páronként relatív prímek, ezért a *kínai maradéktétel* szerint létezik ilyen A . Nyilván ($2M \mid A$ miatt) az A összetett szám, a sorozat többi eleme pedig azért összetett, mert osztható az említett számokkal, és nagyobb A -nál.

Megjegyzés. A kínai maradéktétel a következőt állítja: ha az $m_1, m_2, \dots, m_k$ egészek páronként relatív prímek, és $c_1, c_2, \dots, c_k$ tetszőleges egész számok, akkor létezik olyan (pozitív) egész szám, amelynek m_i -vel való osztási maradéka megegyezik a c_i osztási maradékával (minden $1 \leq i \leq k$ -ra).